光子のエネルギーと波動のエネルギーの関係

１．波動の伝達エネルギー

質量m，ばね定数kのばね振り子を振幅Aで単振動させたときの全力学的エネルギーを考える。初期位相ϕとすると，この単振動の変位xは，振動数fとして，

$x = A\sin(2\pi ft + \phi)$　　　　ここで，運動方程式より　$2\pi f = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である。

速度vは

$$v = 2\pi fA\cos(2\pi ft + \phi)$$

よって，全力学的エネルギーEは

$$E = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(2\pi ft + \phi) + \frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2 f^2 A^2\cos^2(2\pi ft + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2 f^2 A^2\sin^2(2\pi ft + \phi) + \frac{1}{2}m\cdot 4\pi^2 f^2 A^2\cos^2(2\pi ft + \phi)$$

$$= 2\pi^2 m f^2 A^2$$

波動は，各媒質の単振動のエネルギーなので，単位体積当たりの波動エネルギー（エネルギー密度）は，mを密度ρに変えて

$$E = 2\pi^2 \rho f^2 A^2$$

単位面積を単位時間に通過するエネルギーW[J/m²s]は，波の速さをvとして，

$$W = 2\pi^2 \rho f^2 A^2 v$$

２．波が二つ重なった時の単位体積当たりの波動エネルギー

振幅Aの波が二つ重なった時の単位体積当たりの波動エネルギー

二つの波動の位相差をϕとして，その変位xは

$$x = A\sin\omega t + A\sin(\omega t + \phi)$$

$$= A\sin\omega t + A\sin\omega t\cos\phi + A\cos\omega t\sin\phi$$

$$= A\sin\omega t(1 + \cos\phi) + A\cos\omega t\sin\phi$$

$$= 2A\sin\omega t\cos^2\frac{\phi}{2} + 2A\cos\omega t\sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\phi}{2}$$

$$= 2A\cos\frac{\phi}{2}\left(\sin\omega t\cos\frac{\phi}{2} + \cos\omega t\sin\frac{\phi}{2}\right)$$

$$= 2A\cos\frac{\phi}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\phi}{2}\right)$$

振幅は $2A\cos\dfrac{\phi}{2}$ なので，単位体積当たりの単振動のエネルギーは

$$E' = 2\pi^2 \rho f^2 \left(2A\cos\frac{\phi}{2}\right)^2$$

位相のずれϕをすべての場合について平均すると　$\cos^2\dfrac{\phi}{2}$ の平均は$\dfrac{1}{2}$である。

よって，

$$E' = 2\times 2\pi^2 \rho f^2 A^2 = 2E$$

同じ振幅の波が二つ重なった場合の単位体積当たりの波動エネルギーは2倍となる。
よって，光子数と振幅の２乗が比例するといえる。

光子のエネルギーと波動のエネルギーの関係

３． 光子の振動数が2倍となったときの単位体積当たりの光のエネルギー

光子の振動数が２倍となると，光子の波長が半分となるために，容器内の光子の定常波の腹の数が２倍となる。一つの腹に光子１個存在しているので，存在可能な光子数は２倍となる。

光子の運動エネルギーは$h\nu$で振動数に比例する。振動数が２倍になれば１個の光子の運動エネルギーが２倍になり，かつ光子数が２倍になるので，単位体積当たりの光子の運動エネルギーは４倍となる。

よって，単位体積当たりの光子の運動エネルギーは，振動数の２乗に比例するといえる。