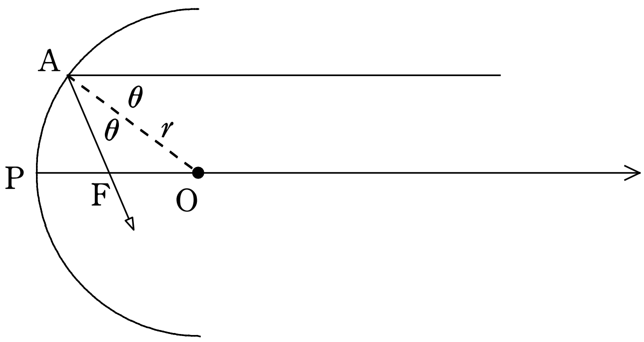
凹面鏡

$\boxed{1}$



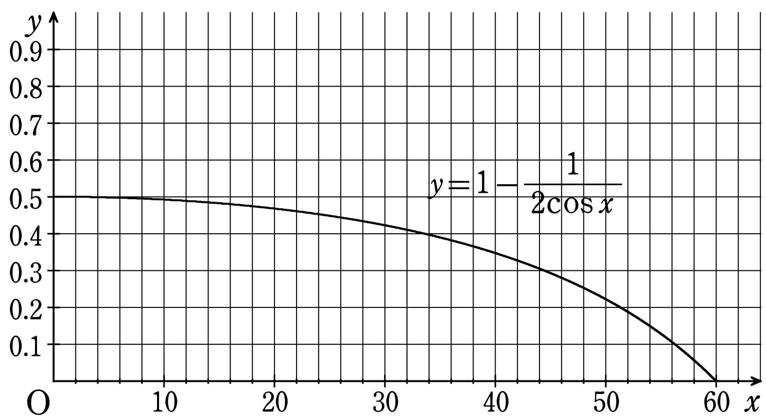
光軸に平行な光が半径 r の球面鏡（中心O）の表面Aに入射角θで入射し反射した。この反射光の光軸との交点F（焦点）の座標を計算してみよう。

∠OAF＝∠AOF＝θなので，△FAOは二等辺三角形である。OF＝ s と置くと，

AO＝ $r = 2s\cos\theta$　　$s = \dfrac{r}{2\cos\theta}$ となる。焦点距離PF＝OP−OF＝ $r - s = r - \dfrac{r}{2\cos\theta}$

PF＝ $\left(1-\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)r$

これをグラフにすると，



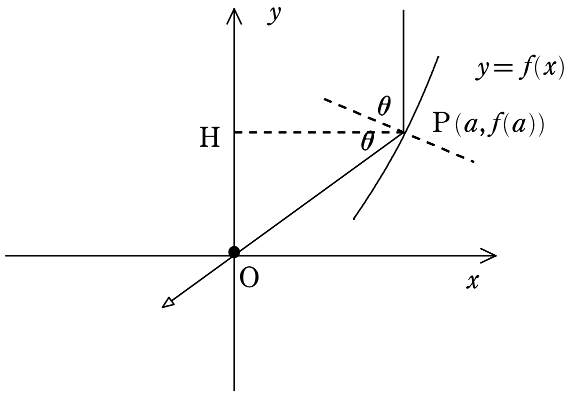
角度θが10°以下のとき，PF＝ $\dfrac{1}{2}r$ であることが分かる。そのとき，焦点はOPの中点である。

球面鏡は入射角θが小さいときのみ反射光が一点に集まる。よって，薄い反射鏡のみ像を作ることができるのである。

凹面鏡

$\boxed{2}$

球面に入射した光は一点に集まらない。それではどのような面だったら，反射光が一点に集まるのだろうか。



鏡面の方程式を $y=f(x)$ とし，光軸（ y 軸）に平行な光が反射鏡の鏡面P点に入射し，その反射光が原点を通過したとする。反射鏡の鏡面Pの座標を $(a, f(a))$ とする。Pにおける接線の傾きは $f'(a)$ なので，法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(a)}$ となる。入射角をθとすると，$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \dfrac{1}{f'(a)}$ である。これは，

$\tan\theta = f'(a)$ (i)

直線POの傾きは $\dfrac{f(a)}{a}$ で表される。反射角はθなので，入射光とのなす角度は2θとなる。よって，

$\angle\mathrm{OPH} = 2\theta-\dfrac{\pi}{2}$ となるので，$\tan\left(2\theta-\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{f(a)}{a}$ となる。これは，

$$\tan 2\theta = -\frac{a}{f(a)}$$

tanの2倍角の公式は

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$ なので，

$$-\frac{a}{f(a)} = \frac{2f'(a)}{1-f'(a)^2}$$ となる。

$a=x$ と置き換え分子分母を逆にすると

$$-\frac{f(x)}{x} = \frac{1-f'(x)^2}{2f'(x)}$$

$f(x) = xg(x)$ と置くと， $f'(x) = g(x) + xg'(x)$

$$-g(x) = \frac{1-(g(x)+xg'(x))^2}{2g(x)+2xg'(x)}$$

$$x^2g'(x)^2 - g(x)^2 - 1 = 0$$

$g(x) = \dfrac{h(x)}{2}-\dfrac{1}{2h(x)}$ とおくと，

（双曲線関数が使える人は $g(x) = \sinh h(x)$ と置くこともできる）

$$g'(x) = \frac{h'(x)}{2} + \frac{h'(x)}{2h(x)^2}$$

$$x^2\left(\frac{h'(x)}{2}+\frac{h'(x)}{2h(x)^2}\right)^2-\left(\frac{h(x)}{2}-\frac{1}{2h(x)}\right)^2-1=0$$

$$x^2\left(1+\frac{1}{h(x)^2}\right)^2h'(x)^2=\left(h(x)+\frac{1}{h(x)}\right)^2$$

$$x\left(1+\frac{1}{h(x)^2}\right)h'(x)=\pm\left(h(x)+\frac{1}{h(x)}\right)$$

$$x\left(\frac{h(x)^2+1}{h(x)^2}\right)h'(x)=\pm\left(\frac{h(x)^2+1}{h(x)}\right)$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)}=\pm\frac{1}{x}$$

両辺を積分して　$\log h(x)=\pm\log x+$定数

$h(x)=cx$, $\dfrac{c}{x}$　　c は定数

$g(x)=\dfrac{cx}{2}-\dfrac{1}{2cx}$　　$h(x)=\dfrac{c}{x}$ も同じ関数となるので無視

$f(x)=xg(x)=\dfrac{c}{2}x^2-\dfrac{1}{2c}$

これは二次関数であり，放物面に平行に入った光が一点に集まるということが分かった。