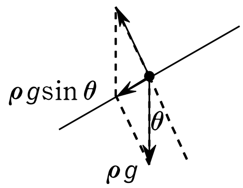
Z05水面波の伝搬速度

１．水面波の伝搬速度

仮定　　すべての深さで同じ速さで移動する。

　　　　波長の長い水面波とする。傾斜角は0に近い。



１　水面の運動方程式

傾斜は$\dfrac{dy}{dx}$で表される。単位体積当たりの質量をρとし，単位体積部分の運動方程式を立てる。

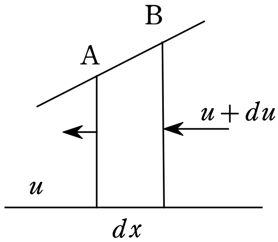
斜面方向の力は$\rho g \sin\theta$

$\theta \fallingdotseq 0$　仮定しているので　$\sin\theta \fallingdotseq \tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$

水の移動速度は傾斜が0に近いので水平方向と同じと考えてよい。速度をuとすると。

運動方程式は

$$\rho\frac{du}{dt} = -\rho g\frac{dy}{dx} \qquad ①$$



２　水位の上昇方程式

単位時間にA面を通過する水量と，B面を通過する水量の差がAB間の水位の上昇となる。

A面の断面積をShとすると，（奥行きがS）

時間dtの流量の差は

$uShdt-(u+du)Shdt$

これがAB間の水面の上昇$Sdydx$と等しくなる。

$Sdydx = -Shdudt$

これは

$$\frac{dy}{dt} = -h\frac{du}{dx} \qquad ②$$

３　方程式の結合

①をtで微分し②をxで微分すると

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2} = -\rho g\frac{d^2y}{dxdt} \qquad \frac{d^2y}{dtdx} = -h\frac{d^2u}{dx^2}$$

方程式を結合させると

$$\frac{d^2u}{dt^2} = gh\frac{d^2u}{dx^2}$$　　これは正式には　$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = gh\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$で偏微分方程式である。

正式に解くのは難しいので，正弦波　$u = A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x}{v}\right)$と仮定して代入すると。

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right) = gh\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{1}{v^2}A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)$$

これを解くと　$v = \sqrt{gh}$

となる。