

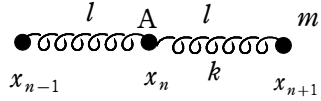
Z03 音速近似式

1. 音速の近似式

摂氏温度 t [°C]における音速 v の近似式 $v=331.6+0.6t$ を誘導してみよう。

(1) 運動方程式

音は空気中を伝わる縦波である。



媒質として空気の変わりに、ばね定数 k 、自然長 l

のばねによって質量 m の物体が一直線状に並んでいる場合を考える。右端から数えて n 番目の物体Aの変位を x_n とする。以下同様。

物体Aの右側のばねは、 $x_{n+1}-x_n$ だけ伸びているので、物体Aが右側のばねから受ける弾性力は $k(x_{n+1}-x_n)$ となる。同様にして左側のばねから受ける弾性力は、力の向きが逆になるので、 $-k(x_n-x_{n-1})$

物体Aの加速度は変位を x_n としているので、時間を t として、 $\frac{d^2x_n}{dt^2}$ であらわされる。

よって、運動方程式は

$$m \frac{d^2x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

今、この媒質を nl を x 座標として正弦波 $x_n = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$ が伝わっているとす
る。これを①に代入して

$$\text{左辺} = m \frac{d^2x_n}{dt^2} = -m \cdot A \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$$

$$\text{右辺} = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}) = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$$

$$= k \left[A \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) - 2\pi \frac{l}{\lambda} \right\} + A \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) + 2\pi \frac{l}{\lambda} \right\} \right] \\ - 2kA \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$$

加法定理で簡単にすると、

$$= 2kA \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) \cdot \cos 2\pi \frac{l}{\lambda} - 2kA \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$$

$$= -2kA \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) \left(1 - \cos 2\pi \frac{l}{\lambda} \right)$$

\cos の2倍角の公式より

$$= -4kA \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) \sin^2 \pi \frac{l}{\lambda}$$

ここで、 $l \ll \lambda$ より、 \sin は省略できる。

$$= -4kA \left(\pi \frac{l}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$$

右辺と左辺は等しいので

$$-m \cdot A \cdot \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right) = -4kA \left(\pi \frac{l}{\lambda} \right)^2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{nl}{\lambda} \right)$$

Z03 音速近似式

簡単にすると、
$$\left(\frac{\lambda}{T}\right)^2 = \frac{k}{m} l^2$$

波の速さを v とすると、 $v = \frac{\lambda}{T}$ なので、

$$v = l \sqrt{\frac{k}{m}} \dots \textcircled{2}$$

この式が波の速さを示す式である。この式には、波長、振動数などの波の要素は含まれていない。 l, k, m はいずれも媒質の状態を示す量である。よって、次のことが言える。

「媒質中を伝わる波の速さは媒質の状態のみによって決まる。」

(2) 空気の状態

次にばねで連結された物体を、空気と想定して考えることにする。 $n-1$ 番目から n 番目までの連結された媒質が断面積 S 、長さ l 、質量 m の帯状の空気と考える。この空気の密度 ρ は、 $\rho = \frac{m}{lS}$ であらわされる。 n 番目の物体Aが x_n 、 $n-1$ 番目が x_{n-1} の変位をしている場合全体の長さが $l + x_n - x_{n-1}$ となるので、若干密度が小さくなる。この密度を $\rho - d\rho$ とすると、

$$\rho - d\rho = \frac{m}{(l + x_n - x_{n-1})S}$$

$$d\rho = \frac{nm}{nlS} - \frac{m}{(l + x_n - x_{n-1})S} = \frac{m}{S} \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l + x_n - x_{n-1}} \right) = \frac{m}{S} \frac{x_n - x_{n-1}}{l(l + x_n - x_{n-1})}$$

$$x_n - x_{n-1} \ll l \text{なので、} \quad d\rho = \frac{m}{S} \frac{x_n - x_{n-1}}{l^2} \dots \textcircled{3}$$

空気のこの部分にはばねの弾性力がかかっており、この弾性力の分だけ圧力が変化する。これが圧力変化である。弾性力は $k(x_n - x_{n-1})$ なので、圧力変化を dP とすると

$$dP = \frac{k(x_n - x_{n-1})}{S} \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より、} \quad dP = \frac{k(x_n - x_{n-1})}{S} = \frac{k}{S} \cdot \frac{Sl^2}{m} d\rho$$

$$\text{これは}\textcircled{2} \text{より} \quad dP = v^2 d\rho \dots \textcircled{4}$$

(3) 断熱変化（熱力学第一法則参照）

空気の振動は急激な変化になるので断熱変化と考えられる。熱力学第一法則より

$$Q = \Delta U + W$$

断熱変化であり、温度が dT 、体積が dV の微小変化をし、定積モル比熱を C_v とすると、 $nC_v dT + p dV = 0 \dots \textcircled{5}$

状態方程式は

$$PV = nRT \quad \text{これを微小変化させて} \quad (P + dP)(V + dV) = nR(T + dT)$$

$$\text{簡単にすると、} \quad PdV + VdP = nRdT \dots \textcircled{6}$$

$\textcircled{5}\textcircled{6}$ より、 dT を消去すると、

Z03 音速近似式

$$PdV + VdP = -nR \frac{PdV}{nC_v} \quad \text{これは,} \quad \frac{C_v + R}{C_v} PdV + VdP = 0$$

$$C_p = C_v + R \text{であり, } \gamma = \frac{C_p}{C_v} \text{とおくと,} \quad \text{上の式は } \frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} \text{となる。}$$

気体の質量を m とすると, $m = \rho V$ なので, 微分形で表すと $Vd\rho + \rho dV = 0$

$$\text{これは, } \frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \text{となるので,}$$

$$\frac{dP}{P} = -\gamma \frac{dV}{V} = \gamma \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\text{④より } v = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \dots \text{⑦}$$

これが, 音速を計算する式である。

(4) 音速の近似式

状態方程式より $P = \frac{n}{V} RT$ となる。モル質量を μ とすると, 気体の質量が μn となるの

で, $\rho = \frac{\mu n}{V}$ 。この式によって V を消去すると, $P = \frac{R}{\mu} \rho T$ 。よって, $\frac{P}{\rho} = \frac{R}{\mu} T$ となる。

これを用いると⑦式は

$$v = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}$$

T は絶対温度なので, 摂氏温度 t であらわすと, $T = T_0 + t$ (T_0 は 0°C の絶対温度)

$$v = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} (T_0 + t)} = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{\mu}} \sqrt{1 + \frac{1}{T_0} t}$$

ここで, $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{1}{2}x$ の近似式を用いると,

$$v = \sqrt{\gamma \frac{RT_0}{\mu}} \left(1 + \frac{1}{2T_0} t \right)$$

空気の比熱比 $\gamma = 1.402$, 気体定数 $= 8.3145 \text{ J/molK}$, $T_0 = 273.155 \text{ K}$,

$\mu = 28.95 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ を代入して計算すると,

$$v = 331.6 + 0.6t$$

となる。