Z02　球殻に働く万有引力

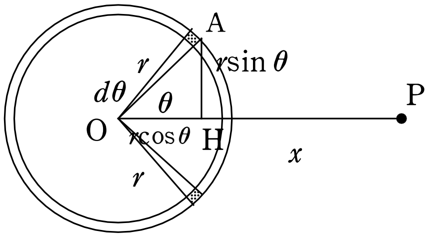
１．球殻にはたらく万有引力

球殻の中心Oから距離x離れた点Pに質量mの質点を置く。

球殻は半径rで厚さdrとする。線分OPからの角度θの方向に点Aをとり，$\theta+d\theta$の方向にA’をとる。

距離AA’＝$rd\theta$となるので，球殻の微小部分の断面積は

$rd\theta dr$となる。



この部分の奥行きをzとし，すると，この部分の質量は球殻の密度をρとすると

$\rho\times rd\theta drz$

また，距離AP＝$\sqrt{(r\sin\theta)^2+(x-r\cos\theta)^2}=\sqrt{x^2-2rx\cos\theta+r^2}$

となるので，この部分がPに及ぼす万有引力の大きさは

$$\frac{G\rho\cdot rd\theta drz\cdot m}{x^2-2rx\cos\theta+r^2}$$

この万有引力は図面上下方向は打ち消されるので，球殻の中心方向成分を求めればよい。∠OPA＝εとすると，万有引力の中心方向成分は

$$\frac{G\rho\cdot rd\theta drz\cdot m}{x^2-2rx\cos\theta+r^2}\cos\varepsilon$$

また，

$$\cos\varepsilon=\frac{PH}{AP}=\frac{x-r\cos\theta}{\sqrt{x^2-2rx\cos\theta+r^2}}$$

となる。よって，万有引力の中心方向成分は

$$\frac{G\rho\cdot rd\theta drz\cdot m}{x^2-2rx\cos\theta+r^2}\cdot\frac{x-r\cos\theta}{\sqrt{x^2-2rx\cos\theta+r^2}}$$

万有引力の大きさが同じとなる部分は，Aから線分OPに下した垂線の足をHとすると，中心H半径AHのドーナツ状の部分である。この部分の長さは$2\pi r\sin\theta$なので，

上の式のzを$2\pi r\sin\theta$で置き換えると，

$$\frac{G\rho rd\theta dr\cdot 2\pi r\sin\theta\cdot m}{x^2-2rx\cos\theta+r^2}\cdot\frac{x-r\cos\theta}{\sqrt{x^2-2rx\cos\theta+r^2}}$$

$$=\frac{2\pi G\rho mr^2(x-r\cos\theta)\sin\theta}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}drd\theta$$

これを$0\leqq\theta\leqq\pi$で積分すると，この球殻がPの及ぼす万有引力が求められる。

$$\int_0^\pi\frac{2\pi G\rho mr^2(x-r\cos\theta)\sin\theta}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}drd\theta=2\pi G\rho mr^2dr\cdot\int_0^\pi\frac{(x-r\cos\theta)\sin\theta}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta$$

$x^2-2rx\cos\theta+r^2=t$とおくと

$2rx\sin\theta\, d\theta=dt$　　$\sin\theta\, d\theta=\dfrac{dt}{2rx}$

積分区間は

$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$なので，$(x-r)^2\leqq t\leqq(x+r)^2$

$r\cos\theta=\dfrac{x^2+r^2-t}{2x}$　なので，$x-r\cos\theta=\dfrac{x^2-r^2+t}{2x}$

よって，

$$\int_0^{\pi}\frac{(x-r\cos\theta)\sin\theta}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}d\theta=\int_{(x-r)^2}^{(x+r)^2}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{x^2-r^2+t}{2x}\cdot\frac{dt}{2rx}=\frac{1}{4rx^2}\int_{(x-r)^2}^{(x+r)^2}\frac{x^2-r^2+t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$$

$$=\frac{1}{4rx^2}\left[-2\frac{x^2-r^2-t}{\sqrt{t}}\right]_{(x-r)^2}^{(x+r)^2}=\frac{1}{4rx^2}\cdot 4r\left(1+\frac{x-r}{|x-r|}\right)$$

よって，

$$df=\int_0^{\pi}\frac{2\pi G\rho mr^2(x-r\cos\theta)\sin\theta}{(x^2-2rx\cos\theta+r^2)^{\frac{3}{2}}}drd\theta=2\pi G\rho mr^2dr\cdot\frac{1}{4rx^2}\cdot 4r\left(1+\frac{x-r}{|x-r|}\right)$$

$$=\frac{2\pi G\rho mr^2dr}{x^2}\left(1+\frac{x-r}{|x-r|}\right)$$

となる。

$x<r$の場合，$df=0$となり，これは，球殻内の万有引力は0であることを示す。…①

$x>r$の場合

$df=\dfrac{4\pi G\rho mr^2dr}{x^2}$となり，これは，球殻の中心に質点があるときの万有引力に等しい。

半径R，密度ρの一様な球体とすると，この球体から受ける万有引力の大きさFは

$$F=\int_0^{R}\frac{4\pi G\rho mr^2}{x^2}dr=G\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho\frac{m}{x^2}$$

このうち，$\dfrac{4}{3}\pi R^3\rho$は球体の質量となるので，これをMとおくと，

$$F=\frac{GMm}{x^2}$$

この式は球体の万有引力は球体の中心にすべての質量が集まっているとした場合の万有引力と等しいことを示している。

- **球体の万有引力は球体中心からの距離で計算してよい。**

球体内のある点を考えると，この点より外側の球殻からの万有引力は①より0なので，球体内の点にはたらいている万有引力は，その点より内側のある球体の万有引力として計算してよいことになる。