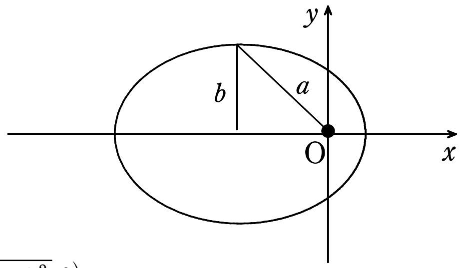
Z01　ケプラー第一法則

１．ケプラーの第一法則（楕円について）

ケプラーの第一法則は，高校数学の知識で公式誘導するのはかなり難しいので，できるだけ高校数学で理解できるように編集してみた。

楕円について



数学において，楕円の標準形は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

である。このときの焦点Fと中心Oとの距離は三平方の定理より

$$\sqrt{a^2-b^2}$$

であらわされる。正の側の焦点Fの座標は$\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$

この焦点Fが原点に来るように楕円を平行移動すると

$$\frac{\left(x+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

この式を$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$と置き換えて極座標に変換すると，

$$\frac{\left(r\cos\theta+\sqrt{a^2-b^2}\right)^2}{a^2}+\frac{(r\sin\theta)^2}{b^2}=1$$

ここで，$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$とおくと，$b=a\sqrt{1-e^2}$

$$(r\cos\theta+ae)^2(1-e^2)+r^2\sin^2\theta=a^2(1-e^2)$$

$$(r\cos\theta+ae)^2(1-e^2)+r^2\sin^2\theta-a^2(1-e^2)=0$$

rについて展開すると

$$(1-e^2)\cos^2\theta\cdot r^2+\sin^2\theta\, r^2+2ae(1-e^2)\cos\theta\cdot r-a^2(1-e^2)^2=0$$

$$(1-e^2\cos^2\theta)r^2+2ae(1-e^2)\cos\theta\cdot r-a^2(1-e^2)^2=0$$

因数分解すると

$$\{(1-e\cos\theta)r+a(1-e^2)\}\{(1+e\cos\theta)r-a(1-e^2)\}=0$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},\quad -\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}$$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$なので，$0\leqq e<1$である。$-\dfrac{a(1-e^2)}{1-e\cos\theta}<0$となるので，

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

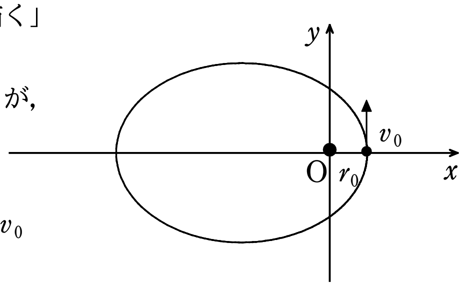
これが，太陽を原点（焦点）とした，楕円の極座標の方程式である。

Z01　ケプラー第一法則

２．ケプラーの第一法則の誘導

「惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描く」

これを証明してみよう。



　この証明は正式には大学の知識が必要であるが，高校程度で理解できるように編集した。

⑴　条件設定

　太陽から，距離r_0離れているところを，速度v_0で，太陽方向と直角方向に惑星が動いているとする。太陽質量をM，惑星質量をm，万有引力定数をGとする。太陽を原点とし,右図のようにx,y軸を設定する。

⑵　運動方程式

　惑星が座標(x,y)にあり，$r^2=x^2+y^2$とする。

この惑星の運動方程式は

x方向　　$m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{x}{r}$．．．①

y方向　　$m\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\dfrac{GMm}{r^2}\dfrac{y}{r}$．．．②

⑶　極座標変換

　極座標変換をする。$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$と置き換えると，①の方程式は

$$\frac{d^2r\cos\theta}{dt^2}=-\frac{GM}{r^2}\cos\theta$$

左辺は積の微分を2回行う。

$$\frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta-2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\sin\theta-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2-r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{GM}{r^2}\cos\theta．．．③$$

同様にして②の方程式は

$$\frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\cos\theta-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{GM}{r^2}\sin\theta．．．④$$

⑶　ケプラーの第二法則

③$\times\cos\theta+$④$\times\sin\theta$を計算すると　　$\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2=-\dfrac{GM}{r^2}$．．．⑤

④$\times\cos\theta-$③$\times\sin\theta$を計算すると，　$2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=0$．．．⑥

⑥$\times r$より　$2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}=0$

これは，　$(r^2)'\dfrac{d\theta}{dt}+r^2\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)'=0$

積の微分の形をしているので　$\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)'=0$

積分して　$r^2\dfrac{d\theta}{dt}$＝定数

角速度をωとすると$\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}=\dfrac{1}{2}r\cdot r\omega=\dfrac{1}{2}rv$

となり，この式は面積速度を意味しており，$r^2\dfrac{d\theta}{dt}$＝定数は面積速度が一定であることを示している。これは，ケプラーの第二法則である。

面積速度は初期設定により，$\dfrac{1}{2}r_0v_0$となる。

$r^2\dfrac{d\theta}{dt}=L$とおく，$L=r_0v_0$である。．．．⑦

⑷　独立変数の変換

この式より，$dt=\dfrac{r^2}{L}d\theta$となるので，これを用いて⑤の変数変換をおこなう。

$$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right)=\frac{d}{\frac{r^2}{L}d\theta}\left(\frac{dr}{\frac{r^2}{L}d\theta}\right)=\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$=\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{L}{r^2}\right)\frac{dr}{d\theta}+\frac{L}{r^2}\frac{L}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\qquad \text{積の微分}$$

$$=-\frac{2L^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{L^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

よって，⑤式は

$$-\frac{2L^2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{L^2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}-r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}.\ .\ .\ ⑥$$

⑸　運動方程式の解

ここで　$u=\dfrac{1}{r}$とおくと　$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{d}{d\theta}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{1}{r^2}\dfrac{dr}{d\theta}$．．．⑧

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}=\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)=\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\qquad \text{積の微分}$$

これを用いると⑥式は

$$-\frac{L^2}{r^2}\left(\frac{2}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{2}{r^2}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)-r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}$$

$$-\frac{L^2}{r^2}\frac{d^2u}{d\theta^2}-r\left(\frac{L}{r^2}\right)^2=-\frac{GM}{r^2}$$

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{GM}{L^2}$$

ここで，$z=u-\dfrac{GM}{L^2}$とおくと

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}+z=0.\ .\ .\ ⑨$$　　となる。

$\dfrac{dz}{d\theta}=s$とおくと

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dz}{d\theta}\right)=\frac{ds}{d\theta}=\frac{ds}{dz}\cdot\frac{dz}{d\theta}=s\frac{ds}{dz}$$

方程式⑨は

$s\dfrac{ds}{dz}+z=0$　　これは，　$sds+zdz=0$

積分して　$\dfrac{s^2}{2}+\dfrac{z^2}{2}=$定数　　変形して　$s^2+z^2=c^2$　　cは定数

$\dfrac{dz}{d\theta}=\sqrt{c^2-z^2}$　　積分して　$\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=\int d\theta+D$　Dは積分定数

$z=c\sin\alpha$とおくと　左辺は　$\displaystyle\int\frac{dz}{\sqrt{c^2-z^2}}=\int d\alpha=\alpha$

右辺は　$\theta+D$　となるので，　$\alpha=\theta+D$

$z=c\sin\alpha=c\sin(\theta+D)$

最初の条件よりv_0は直角方向に方向を持つので，$\theta=0$のとき，$\dfrac{dr}{d\theta}=0$

⑧より，$\dfrac{du}{d\theta}=0$　また，$z=u-\dfrac{GM}{L^2}$より　$\dfrac{dz}{d\theta}=0$となる。

$z'=c\cos(\theta+D)$なので，　$\theta=0$のとき，$c\cos D=0$であることから$D=\dfrac{\pi}{2}$

$z=c\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=c\cos\theta$はこの方程式の解である。

$z=u-\dfrac{GM}{L^2}$　より，　$u=c\cos\theta+\dfrac{GM}{L^2}$

$$r=\frac{1}{u}=\frac{1}{c\cos\theta+\dfrac{GM}{L^2}}=\frac{\dfrac{L^2}{GM}}{1+\dfrac{L^2}{GM}c\cos\theta}$$

(6)　解の解釈

太陽を焦点（原点）とする楕円の式は　$r=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$　であるので，この運動方程式の解は太陽を焦点とした楕円を意味している。

両者を比較すると，

$e=\dfrac{L^2}{GM}c$，$\dfrac{L^2}{GM}=a(1-e^2)$のとき両者は一致する。．．．⑨

よって，惑星は太陽を一つの焦点とする楕円軌道を描くことが示された。

$\theta=0$のとき，$r_0=\dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos 0}=a(1-e)$．．．⑩

⑨⑩および，$L=r_0v_0$より

Z01　ケプラー第一法則

$$a=\frac{r_0GM}{2GM-r_0{v_0}^2},\quad e=\frac{r_0{v_0}^2-GM}{GM}$$

ここで，eは楕円の離心率と呼ばれているものである。$e=0$が円軌道
$0<e<1$が楕円軌道，$e=1$が放物線軌道，$e>1$が双曲線軌道を表している。