比例反比例

１．比例･反比例

１　比例について

変数 x と y があって，片方が２倍，３倍と変化すると，もう片方も２倍，３倍と変化する関係を比例関係と呼んでいる。例１は比例関係である。

例１

x	2	4	6	8
y	6	12	18	24

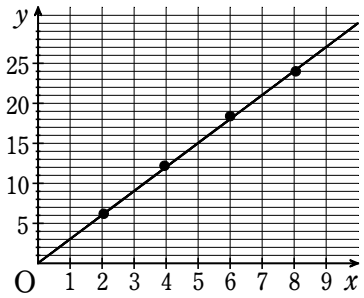
この例では x が２倍，３倍となると，y も２倍，３倍となっている。この場合は比例関係といえる。比例関係にあるということはそのままでは「＝」でつなぐことはできない。片方にある同じ数値をかけるともう片方の数値が求められる。この同じ数値を比例定数と呼んでいる。この例では x に３をかけてやれば y を求めることができる。すなわち，

$y=3x$

の関係にあるといえる。

点を xy 平面上にプロットしていくと，原点を通る直線状に並ぶ。それらをつなぐと，図１のようになる。

図１



比例関係にあるものは商をとると一定の値となる。例１では $\frac{y}{x}$ の値はすべての x に対して同じ値をとり，その値は３であり，これが，比例定数である。

a と b が比例関係にあるとき，a が n 倍になった（na）とき，b も n 倍になるので nb となる。ここで，a と b の比 $a:b$ は $na:nb$ と等しくなるので，$a:b = na:nb$ が成り立つ。よって，この場合，内項同士の積 $b \times na$ は外項同士の積 $a \times nb$ はともに nab となり互いに等しくなる。比例関係にあるとき，「内項の積＝外項の積」がいえるのである。

これは、たすき掛けが等しいと考えてもよい。

$$\begin{array}{ccc} a & b & \longrightarrow nab \\ na & nb & \longrightarrow nab \end{array}$$

この関係に納得していない人は，ここで納得しておいてほしい。

＜ 例２＞

「x と y が比例関係にあるとき，x が２のとき，y が５であった。x が６のとき，y

はいくらか。」

この問題を比例式で解いてみる。

$2 : 5 = 6 : y$

外項の積は $2y$ で内項の積は5×6＝30。「内項の積＝外項の積」より，$2y = 30$ で，$y = 15$と求められる。

$$\begin{array}{ccc} 2 & 5 & \longrightarrow 30 \\ 6 & y & \longrightarrow 2y \end{array}$$

当然ながら x が2から6に3倍変化しているので，y も5から3倍変化して15と計算してもよい。また，x から y になるのに2.5倍なので，6から y も2.5倍である。よって，6×2.5＝15という解き方もできる。

一つの解き方だけではなく，問題を見て，その時最も早く楽に解ける方法で解いてもらえばよい。そのためにも比例の考え方の原理を理解しておくべきである。

＜例３＞

「あるばねを10cm伸ばすのに50Nの力を必要とした。このばねに200Nの力を加えたとき，何cm伸びているか。」

ばねの伸びと引く力の間には比例関係がある。200Nは50Nの4倍なので，伸びも4倍になって10cm×4＝40cmが最も楽なとき方であろう。

比例式の場合

伸びを x として，比例式を立てると，　$10:50 = x:200$

内項の積＝外項の積より，$50x = 200 \times 10$　よって，$x = 40\text{cm}$

公式を使う場合

最も時間がかかるのが公式を使う方法である。フックの法則 $F = kx$ が成り立つので，$F = 50\text{N}$，$x = 0.10\text{m}$より，ばね定数 k は　$50 = k \times 0.10$　，$k = 500\text{N/m}$

F に200Nを代入して　$200 = 500 \times x$　より，$x = 0.40\text{m} = 40\text{cm}$

公式を使うのが返って難しくなる場合もあるので，比例式が使えれば早く解ける場合がある。

＜例４＞

「ある物質の比熱は c [J/gK]である。質量 m [g]の物質を ΔT [k]上昇させるのに必要な熱量 Q [J]を求めよ。」

比熱 c [J/gK]の意味は1gの物質を1K上昇させる熱量が c [J]であることを意味している。質量が m 倍，温度変化が ΔT 倍なので，熱量も m 倍の ΔT 倍になる。

1g　　1K　　→　c [J]

m　　ΔT　　→　$mc\Delta T$

よって，　$Q = mc\Delta T$

となり，公式が導かれる。

このように，物理公式の中には単純に比例式で導ける式が多い。比例の考え方を理解することで，多くの公式を理解できるのである。

比例反比例

２　反比例について

変数 x と y があって，片方が２倍，３倍と変化すると，もう片方が $\frac{1}{2}$ 倍，$\frac{1}{3}$ 倍と変化する関係を反比例関係と呼んでいる。例１は反比例関係である。

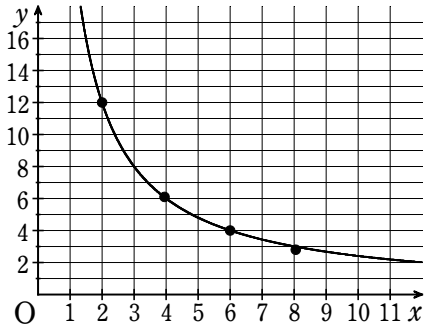
例１

x	2	4	6	8
y	12	6	4	3

反比例関係にあるデータは，積が同じ値となる。例１では積が24である。

すなわち，$xy=24$であり，$y=\frac{24}{x}$ となる。

これをグラフにすると下のようになる。



＜例２＞

「x と y が反比例関係にあり，$x=2$ のとき，$y=8$であった。$x=4$のとき，y はいくらか。」

〇積で解く

反比例関係にあるので積が一定である。x と y の積は$2\times8=16$である。$x=4$のとき，積が16になるためには $y=4$である必要がある。

〇反比例で解く

x が2倍になっているので，y は $\frac{1}{2}$ 倍になっているはずである。よって，y は8の $\frac{1}{2}$ となり，$y=4$である。

〇　逆比で解く

整数比でないときによく使う方法である。x 同士は2:4であり，反比例なので，y は逆比で$\frac{1}{2}:\frac{1}{4}$ となる。整数比にすると 4:2 =2:1である。2:1=8:4となるので，$y=4$となる。

$a:b$ の逆数の比は $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}$ であるが，ab をかけると，$b:a$ となる。よって，$a:b$ の逆比は $b:a$ である。反比例の場合は逆比になると考えて説くことができる。

＜例３＞

「2Ωの抵抗Aと3Ωの抵抗Bを並列につないだ。Aに0.6A流れているとき，Bに流れている電流は何Aか」

比例反比例

○　反比例＝逆比を用いる

オームの法則より $V=RI$ であるが，並列接続なので，電圧は一定である。 RI が一定となるので， R と I は反比例の関係になる。AとBは抵抗の比が2：3なので，電流の比は逆比で3：2となる。よって，$0.6\text{A}\times\frac{2}{3}=0.4\text{A}$ と求められる。

○　積が一定を使う

RI ＝一定なので，Aは2Ω×0.6A＝1.2，Bの電流を I とすると，$3I=1.2$　となり， I ＝0.4Aである。

物理で用いる反比例は $A=BC$ という式があり，別の条件により A ＝一定であることが分かれば， B と C が反比例関係にあることになり，反比例の計算をする場合が多い。比例は比例を利用して式を作ることが多いが，反比例を利用して式を作ることはあまりない。