置換積分

1

$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$をどうやって積分するか。以下はA，B二人の会話です。

A：中の関数が複雑だね。簡単にしよう。

B：どう置き換えれば簡単になるかな。式の中に平方の和の形があるね。

A：$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$の式があるので，これを使えば簡単になるんじゃない？

B：そうだ，$x=r\tan\theta$と置き換えてみよう。やってみるよ。

$$\frac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(r^2+r^2\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{r^3}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{1}{r^3}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\cos^3\theta}{r^3}$$

A：簡単になった。じゃあ，与式を置き換えてみるよ。

与式$=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos^3\theta}{r^3}dx$

B：rは定数なので外に出せるね。

与式$=\dfrac{1}{r^3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\cos^3\theta\,dx$

A：だいぶ簡単になったけど，何か変だね。

B：被積分関数の変数はθだけどxで積分しなければいけないよね。

A：変数が違うね。変数が同じでなければ積分できないはず。

B：変数を同じにするにはどうしたらいいんだろうか？

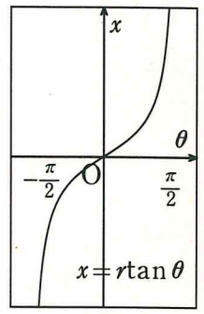
A：θで積分するには$d\theta$がなければならないよね。

B：与式はdxだけれど，どう置き換えればよいのか？

A：$dx=\dfrac{dx}{d\theta}d\theta$　と置けばいいのでは？

B：そうだね。でも，積分区間はたしかxの値だよね。$-\infty<x<\infty$のはずで，
θで積分するには積分区間はθの範囲のはず。
$-\infty<x<\infty$をθの範囲に変えるにはどうしたらいいんだ？

A：$x=r\tan\theta$のグラフを書いてみようよ。右のようになったよ。



B：このグラフを見ると，$-\infty<x<\infty$のときは
$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$でいいよね。

A：じゃあこの積分は，こうなるね。

$$\frac{1}{r^3}\int_{-\infty}^{\infty}\cos^3\theta\,dx=\frac{1}{r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\frac{dx}{d\theta}d\theta$$

B：でも，この式の中の$\dfrac{dx}{d\theta}$て，なんだ？

A：これ，xをθで微分するということじゃないの？

B：$x=r\tan\theta$だから，$\dfrac{dx}{d\theta}=r(\tan\theta)'=\dfrac{r}{\cos^2\theta}$だね。

A：じゃあ，与式に代入してみよう。

与式$=\dfrac{1}{r^3}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\frac{dx}{d\theta}d\theta=\frac{1}{r^3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\frac{r}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{1}{r^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$

B：お！，驚くほど簡単になったじゃないか。

A：でも，cosの積分習ってないよ。

B：積分は微分の逆演算だから，微分して$\cos\theta$になる関数を探せばよいのではないか？

A：そうか，$\sin\theta$を微分すると$\cos\theta$になるので，$\cos\theta$を積分したら$\sin\theta$じゃない？

B：そうだね。

$\displaystyle\int\cos\theta=\sin\theta+$積分定数

となるね。

A：じゃあ，積分できるね。

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(r^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx=\frac{1}{r^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{r^2}\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{r^2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{r^2}$$

B：できた。めでたし，めでたし。

(　　)組(　　)番　名前(　　)