物理数学（微積）

1 微分

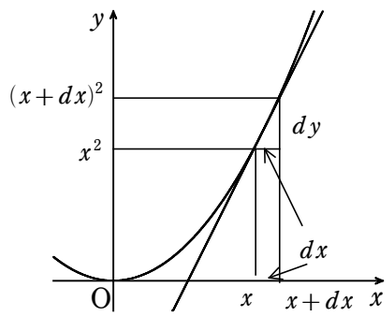
ある関数　$y=f(x)$　とxの微小差dx，yの微小差dyで，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$を求めることを微分という。$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$とおく。

微分の定義は正式には　$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$　である。

以下　dx^2は$(dx)^2$を示している。

（１）　＜微分の意味＞

$y=x^2$ のグラフ上の点(1,1)における接線の傾きを求める。 x 軸上に点 $(x,0)$ をとり，それより， dx だけ大きい点 $(x+dx,0)$ をとる。それぞれに対するグラフ上の座標は (x,x^2)，$(x+dx,(x+dx)^2)$ である。この2点の y 座標の差を dy とする。



この2点間の傾きは $\dfrac{dy}{dx}$ であらわされる。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=\frac{x^2+2xdx+dx^2-x^2}{dx}=2x+dx$$

ここで，dxは限りなく0に近いので，　$y'=\dfrac{dy}{dx}=2x$　　$f'(x)=2x$

ここで， $x=1$ を代入すると， $f'(1)=2$ となり，接線の傾きは2である。

このように微分は接線の傾きを求めるという意味がある。

（２）　＜二次関数の微分＞　例　$y=x^2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^2-x^2}{dx}=\frac{x^2+2xdx+dx^2-x^2}{dx}=2x+dx$$

ここで，dxは限りなく0に近いので，

$y'=\dfrac{dy}{dx}=2x$　　$f'(x)=2x$

と置ける。これが微分である。

（３）　＜3次関数の微分＞　例　$y=x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^3-x^3}{dx}=\frac{x^3+3x^2dx+3xdx^2+dx^3-x^3}{dx}=3x^2+3xdx+dx^2$$

よって，

$y'=\dfrac{dy}{dx}=3x^2$　$f'(x)=3x^2$

（４）　＜ n次関数の微分＞　$y=x^n$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+dx)^n-x^n}{dx}=\frac{x^n+{}_nC_1x^{n-1}dx+{}_nC_2x^{n-2}dx^2+\cdot\cdot\cdot+dx^n-x^n}{dx}$$

$$={}_nC_1x^{n-1}+{}_nC_2x^{n-2}dx+\cdots+dx^{n-1}={}_nC_1x^{n-1}=nx^{n-1}$$

$y'=\dfrac{dy}{dx}=nx^{n-1}$　$f'(x)=nx^{n-1}$

例　$(x^5)'$ は $n=5$として，$(x^5)'=5x^4$

（５）　＜分数関数の微分＞　$y=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{1}{x+dx}-\dfrac{1}{x}}{dx}=\frac{-dx}{x(x+dx)dx}=-\frac{1}{x(x+dx)}$$

dxは限りなく0に近いので，

$y'=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{x^2}$　　$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

例　$\dfrac{1}{x}=x^{-1}$ と置いても解ける。 $n=-1$ として４を用いると，$-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}$

（６）　＜定数の微分＞　$y=a$　aは定数

$y'=\dfrac{a-a}{dx}=0$

定数を微分すると0である。

（７）　＜関数の定数倍の微分＞　$y=af(x)$　aは定数

$$\frac{dy}{dx}=\frac{af(x+dx)-af(x)}{dx}=a\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=af'(x)$$

$y'=\{af(x)\}'=af'(x)$

例　定数は無視して微分すればよい。

$(6x^5)'$ は $n=5$として，$(6x^5)'=6(x^5)'=30x^4$

（８）＜関数の和の微分＞　$y=f(x)+g(x)$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\{f(x+dx)+g(x+dx)\}-\{f(x)+g(x)\}}{dx}=\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}+\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}$$

$=f'(x)+g'(x)$

$y'=\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

同様にして　関数の差の微分は

$y'=\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

関数の和差はそれぞれを微分すればよい。

例　$(3x^3+2x^2-3x)'=3(x^3)'+2(x^2)'-3(x)'=9x^2+4x-3$

（９）　＜関数の積の微分＞　$y=f(x)g(x)$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x)g(x)}{dx}=$$

$$=\frac{f(x+dx)g(x+dx)-f(x+dx)g(x)+f(x+dx)g(x)-f(x)g(x)}{dx}$$

$$=f(x+dx)\frac{g(x+dx)-g(x)}{dx}+\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}g(x)$$

$$=f(x+dx)g'(x)+f'(x)g(x)=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$$

$y'=\{f(x)g(x)\}'=f(x)g'(x)+f'(x)g(x)$

積の微分は片方ずつ微分した式の和である。

例　$((2x+1)(3x+2))'$

$=(2x+1)'(3x+2)+(2x+1)(3x+2)'=2(3x+2)+3(2x+1)=12x+9$

（１０）　＜合成関数の微分＞　$y=f(g(x)))$

$g(x)=t$ とおくと，$y=f(g(x)))=f(t)$ となる。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{df(t)}{dt}\times\frac{dg(x)}{dx}=f'(t)\,g'(x)=f'(g(x))\,g'(x)$$

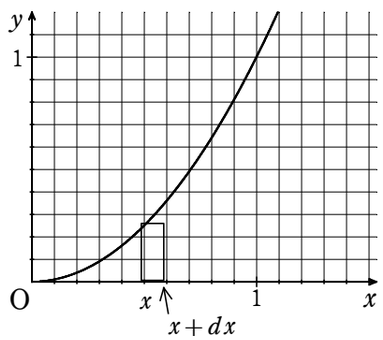
合成関数は置き換えた文字で微分し，置き換えた式を微分した式をかけておけばよい。

例　$((3x^2+1)^5)'$ は $t=3x^2+1$ とおくと，

$$(5(3x^2+1)^4)'=5(3x^2+1)^4\times(3x^2+1)'=30x(3x^2+1)^4$$

$\boxed{2}$ 求積

例１　$y=x^2$のグラフ下の$0\leqq x\leqq 1$の部分の面積を求める。



グラフ下0～xまでの面積を$S(x)$とすると，

0～$x+dx$までの面積は，$S(x+dx)$である。

この差が右図の長方形部分の面積である。

（dxは限りなく0に近い実数）

この長方形部分の面積はx^2dxなので，

$S(x+dx)-S(x)=x^2dx$

が成り立つ。これは，

$$\frac{S(x+dx)-S(x)}{dx}=x^2$$

となり，左辺は微分の形をしている。微分してx^2になる関数を求めればよいことになる。

微分の逆演算でこれを積分という。

$S'(x)=x^2$となる$S(x)$を求める。

$S(x)=ax^3$とおくと　$\boxed{1}$の例２および例６により，$S'(x)=3ax^2$となる。これが，x^2となるには，$a=\frac{1}{3}$なら良い。よって，

$$S(x)=\frac{1}{3}x^3$$

$x=1$までの面積なので$x=1$を代入して，求める面積は$\frac{1}{3}$となる。

ところが，定数Cを微分すると0になるので，$S(x)=\frac{1}{3}x^3+C$　（Cは任意定数）も微分するとx^2になる。このように積分には必ず任意定数が加わる。これを積分定数という。

この時の積分は記号で次のように表す。

$\frac{S(x+dx)-S(x)}{dx}=x^2$となる$S(x)$を表す記号　　$S(x)=\int x^2dx+$任意定数

0～１までの面積を求めるので，その区間を加えて

$$\int_0^1 x^2dx$$

と表す。

積分には任意定数が必ず付くので，これをCと置けば，$S(1)=\frac{1}{3}+C$となり，Cが付くのである。ところが$S(0)=C$となり，$S(0)=0$なので，$C=0$であることがわかる。

0～1の区間の面積を求めるには，$S(1)-S(0)$と差を求めることによりCが消えて面積を計算できることがわかる。数学ではこの計算を次のように表す。

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

一般に$y=f(x)$の積分が$F(x)$のとき，$a\leqq x\leqq b$の面積を求めるには

$$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

と書く。

$\boxed{3}$ x^nの積分

ax^{n+1}を微分すると，$\boxed{1}$の例３，６より，$a(n+1)x^n$となるので，

微分した結果がx^nになるためには，$a=\frac{1}{n+1}$となるので，

$$\int x^ndx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\quad（C\text{は積分定数}）$$

$y=a\frac{x^{n+1}}{n+1}$を微分すると，$y'=ax^n$となるので，

$$\int ax^ndx=a\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$　となる。