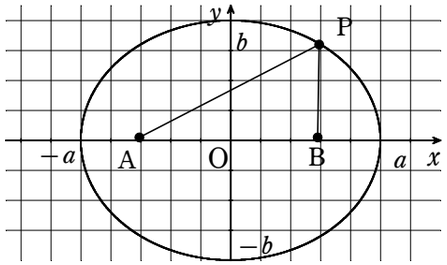
M06楕円

1 楕円の式

数学

座標平面上の異なる2点A$(-p,0)$，B$(p,0)$からの距離の和が$2a$となる点Pの軌跡を求めよ。

条件より　AP＋BP＝$2a$　　①



座標P(x,y)とすると，

AP＝$\sqrt{(x+p)^2+y^2}$

BP＝$\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

①の代入して

$\sqrt{(x+p)^2+y^2}+\sqrt{(x-p)^2+y^2}=2a$

$\sqrt{(x+p)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

両辺を2乗して

$(x+p)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-p)^2+y^2}+(x-p)^2+y^2$

$(x+p)^2-(x-p)^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

$4xp-4a^2=-4a\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

$xp-a^2=-a\sqrt{(x-p)^2+y^2}$

両辺を2乗して

$(xp-a^2)^2=a^2\{(x-p)^2+y^2\}$

$x^2p^2-2a^2xp+a^4=a^2x^2-2a^2xp+a^2p^2+a^2y^2$

$(a^2-p^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-p^2)$

ここで，　$b^2=a^2-p^2$とおくと

$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

両辺をa^2b^2で割ると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

これが楕円の方程式（標準形）である。aを半長径，bを半短径という。

この時のA，Bを楕円の焦点という。

ここで　$p=ae$とおくと，　$b^2=a^2-p^2$より

$b^2=a^2-a^2e^2$　となり，　$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$となる。

このときのeを離心率と呼んでいる。

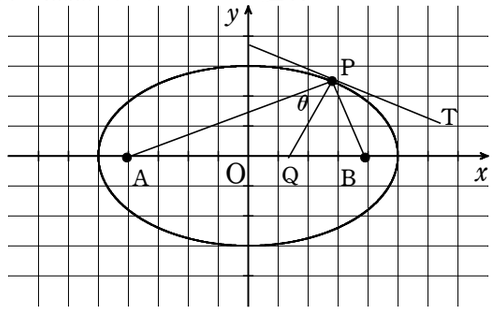
変形して

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

ここで，$\sqrt{a^2-x^2}$は原点中心で半径aの円を意味しているので，楕円は円を$\dfrac{b}{a}$倍につぶしたものと考えることができる。

2 焦点の性質

楕円の一方の焦点から出た光はもう一方の焦点に集まることの証明



楕円の方程式

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

の焦点の座標は離心率をeとして、

$A(-ae,0)$、$B(ae,0)$

離心率は

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

であらわされる。

楕円の周上の点をP(x,y)とすると、

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

が成立する。

この点における接線の傾きは、①を微分して

$$\frac{2x}{a^2}dx+\frac{2y}{b^2}dy=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

なので、法線の傾きは　$\dfrac{a^2}{b^2}\dfrac{y}{x}$　となる。よって直線PQの方向ベクトルは

$$\vec{p}=\left(1,\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}\right)$$

直線APの方向ベクトルは$\vec{q}=(x+ae,y)$

直線BPの方向ベクトルは$\vec{r}=(x-ae,y)$

$\cos\angle APQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}$　　$\cos\angle BPQ=\dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{p}||\vec{r}|}$

この両者が等しければ、反射の法則が成立しているのでAから出た光がBに集まることがいえる。

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{|\vec{q}|}-\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{|\vec{r}|}=\frac{x+ae+\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}y}{\sqrt{(x+ae)^2+y^2}}-\frac{x-ae+\frac{a^2}{b^2}\frac{y}{x}y}{\sqrt{(x-ae)^2+y^2}}$$

ここで、①より、　$y^2=\dfrac{(a^2-x^2)}{a^2}b^2$　これを代入すると

$$\frac{x+ae+\frac{a^2}{b^2}\frac{1}{x}\frac{a^2-x^2}{a^2}b^2}{\sqrt{(x+ae)^2+\frac{a^2-x^2}{a^2}b^2}}-\frac{x-ae+\frac{a^2}{b^2}\frac{1}{x}\frac{a^2-x^2}{a^2}b^2}{\sqrt{(x-ae)^2+\frac{a^2-x^2}{a^2}b^2}}$$

$$=\frac{x+ae+\dfrac{a^2-x^2}{x}}{\sqrt{(x+ae)^2+\dfrac{a^2-x^2}{a^2}b^2}}-\frac{x-ae+\dfrac{a^2-x^2}{x}}{\sqrt{(x-ae)^2+\dfrac{a^2-x^2}{a^2}b^2}}$$

$e=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ より、　$b^2=a^2(1-e^2)$ を代入して

$$=\frac{x+ae+\dfrac{a^2-x^2}{x}}{\sqrt{(x+ae)^2+(a^2-x^2)(1-e^2)}}-\frac{x-ae+\dfrac{a^2-x^2}{x}}{\sqrt{(x-ae)^2+(a^2-x^2)(1-e^2)}}$$

$$=\frac{a^2+aex}{x\sqrt{(a+ex)^2}}-\frac{a^2-aex}{x\sqrt{(a-ex)^2}}=0$$

入射角と反射角が等しくなるので、反射の法則が成立している。

よって、A点から出た光はB点に集まるといえる。

$\boxed{3}$ 楕円の面積

楕円の式は

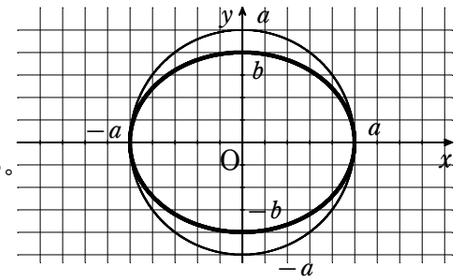
$y=\pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

と置けるので，円を$\dfrac{b}{a}$倍に

つぶしたものと考えることができる。

よって，面積Sも円の面積の$\dfrac{b}{a}$倍

になる。



$S=\pi a^2\times\dfrac{b}{a}=\pi ab$

楕円の面積は　πab　で表される。