M04　微分方程式

１．微分方程式

物理では微分形式であらわされた方程式（微分方程式）を解く機会が多くなる。その中でも，加速度の関係で2階微分方程式を解く事が多い。解く機会の多い形式の微分方程式の解法をあげておく。それが，次の形式の方程式で，独立変数tを含まない場合である。

$$\frac{d^2x}{dt^2}=f\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$$

＜解法＞

$\frac{dx}{dt}=v$とおく，

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

となり，

$$v\frac{dv}{dx}=f(x,v)$$

これは，１階微分方程式となる。この変形をすることによって解ける場合が多い。

＜例＞　単振動の運動方程式

質量mの物体に，変位xのときの復元力$-kx$がはたらいている場合の運動方程式を解いてみよう。

加速度は$\frac{d^2x}{dt^2}$であらわされ，そのときの力が$-kx$なので，運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx \quad （t=0のとき，x=0，v=v_0とする。）$$

$\frac{dx}{dt}=v$とおくと，　$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$　より，

$$mv\frac{dv}{dx}=-kx$$

$$mvdv+kxdx=0$$

積分して

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=C \quad （Cは定数）$$

この式はエネルギー保存則に他ならない。

$t=0$のとき，$x=0$，$v=v_0$なので，$C=\frac{1}{2}mv_0{}^2$となる。

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}mv_0{}^2$$

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{v_0{}^2-\frac{k}{m}x^2} \qquad \frac{dx}{\sqrt{v_0{}^2-\frac{k}{m}x^2}}=dt$$

両辺を不定積分して

$$\int \frac{dx}{\sqrt{{v_0}^2 - \frac{k}{m}x^2}} = t + D \qquad D\text{は積分定数}$$

$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin s$　とおくと

$\sqrt{{v_0}^2 - \frac{k}{m}x^2} = v_0\cos s$　$dx = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\cos s$　より，

$\int \sqrt{\frac{k}{m}}\,ds = t + D$　　$\sqrt{\frac{k}{m}}\,s = t + D$　となるので，

$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{m}{k}}(t + D)$

$t = 0$のとき，$x = 0$なので，

$x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{m}{k}}\,t$

このようにして解く事ができる。