M03外積

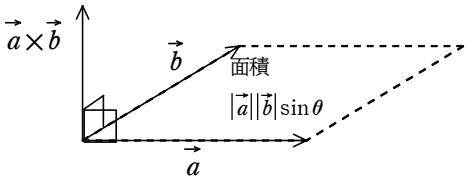
１．ベクトルの外積について

高校では外積は扱わないが、理系の大学に入学後大学生が最初に苦労するのがこの外積である。高校時代ある程度の知識を持っておくとその苦労も軽減されると思われるので、ここに解説しておく。

⑴外積とは

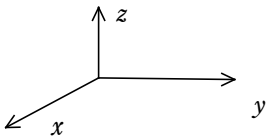
内積がベクトルの方向成分を求めるのに対して、両ベクトルと直角方向のベクトルを求めるというものである。

$\vec{a}\times\vec{b}$は、$\vec{a}$、$\vec{b}$両方に直角で大きさは$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$で、向きは$\vec{a}\to\vec{b}$の方向に回転したときの右ねじの向きである。



このようなベクトルなので、外積を使うときは必ず空間ベクトルとなる。

xyz空間は$x\to y$の方向に回転したときの、右ねじの進む向きをz軸正の向きと定める。図に示すと右図のようになる。



こうすると、$y\to z$の方向に回転したときの右ねじの向きにx軸があり、$z\to x$の向きに回転したときの右ねじの向きにy軸が存在することになる。

⑵　外積のz成分

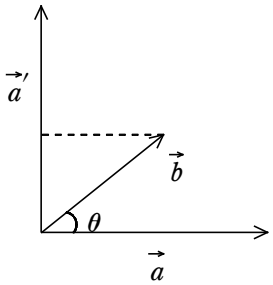
xy平面上のベクトル

$\vec{a}=(a_x,a_y)$、$\vec{b}=(b_x,b_y)$の外積を求めると

外積はz方向のベクトルとなる。その成分を求めると、

$\vec{a}$と直角方向で同じ大きさのベクトルは$\vec{a}'=(-a_y,a_x)$

である。（$\vec{a}\cdot\vec{a}'=0$である。）



$|\vec{b}|\sin\theta$は$\vec{b}$の$\vec{a}'$方向成分であるので、

$$|\vec{b}|\sin\theta=\frac{\vec{a}'\cdot\vec{b}}{|\vec{a}'|}=\frac{\vec{a}'\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$$

より、

$$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\vec{a}'\cdot\vec{b}=(-a_y,a_x)\cdot(b_x,b_y)=a_xb_y-a_yb_x$$

となる。これが、外積（$\vec{a}\times\vec{b}$）のz成分である。

これをわかりやすい表示に変換すると

$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$とおき、右下がりの積から右上がりの積を引くと$a_xb_y-a_yb_x$となる。

同様にしてy成分は$\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}=a_zb_x-a_xb_z$、$x$成分は$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}=a_yb_z-a_zb_y$となる。

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$、$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$の場合の外積

$\vec{a}\times\vec{b}=(a_x,a_y,a_z)\times(b_x,b_y,b_z)$

$$=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)=(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x)$$

である。

(3)　交換法則

$\vec{a}\times\vec{b}$のz成分は$a_x b_y - a_y b_x$で、$\vec{b}\times\vec{a}$のz成分は$a_y b_x - a_x b_y$となる。他の成分も同様で

その結果

$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

となり、外積では交換法則が成り立たない。

(4)　分配法則

$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$、$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$、$\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$とする。

z成分のみの計算

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\{(a_x,a_y)+(b_x,b_y)\}\times(c_x,c_y)=(a_x+b_x,a_y+b_y)\times(c_x,c_y)$$

$$=(a_x+b_x)c_y-(a_y+b_y)c_x=a_x c_y - a_y c_x + b_x c_y - b_y c_x=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$$

他の成分も同様である。

「外積は分配法則が成り立っている」