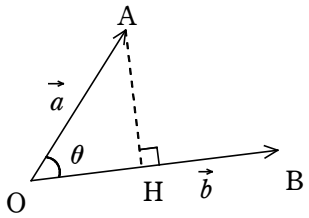
M02　内積

１．ベクトルの内積の物理への活用

ベクトルの内積は物理的にどういう意味を持っているのであろうか。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

これを図示すると右のようになる。



この図で$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$とすると、

$|\overrightarrow{OH}|=|\vec{a}|\cos\theta$

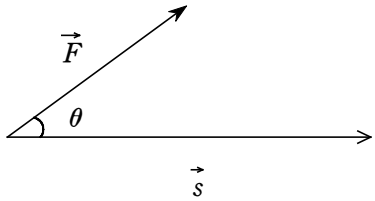
となり、この式は$\vec{a}$の$\vec{b}$方向成分を求めていることになる。

これにより、$\vec{a}$の$\vec{b}$方向成分は、$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$であらわされ、$\vec{b}$の$\vec{a}$方向成分は、$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$になる。

「ベクトルの内積はベクトルの成分分解に使える」

ということになる。

(1)　仕事への活用



移動方向と角度θずれた方向に力$\vec{F}$を加え、変位$\vec{s}$移動させたときの仕事Wは、

$W=|\vec{F}|\cos\theta\cdot|\vec{s}|$であらわされる。

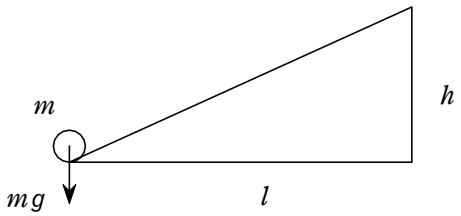
これは、ベクトルの内積である。

$W=\vec{F}\cdot\vec{s}$

大きさで計算するときは、仕事の符号には特に注意を要するが、ベクトルの内積で計算するときは符号も一緒に計算されるために、符号に注意する必要がなくなる。

＜例＞

水平距離l、高さhの滑らかな斜面の最下点に質量mの物体を置いた時、この物体が最上端に達する最低速度vを計算せよ。



＜解説＞

重力ベクトル$\vec{g}$は、$\vec{g}=(0,-mg)$

変位ベクトル$\vec{s}$は、$\vec{s}=(l,h)$

重力のした仕事は$W=\vec{g}\cdot\vec{s}$なので、

$$\frac{1}{2}mv^2+W=0$$

より、

$$\frac{1}{2}mv^2+\vec{g}\cdot\vec{s}=0$$

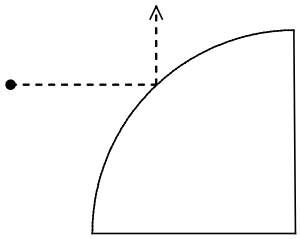
$$\frac{1}{2}mv^2+(0,-mg)\cdot(l,h)=\frac{1}{2}mv^2-mgh=0$$

$$v=\sqrt{2gh}$$

と計算できる。

(2)　運動量への活用

滑らかな面に衝突したときの跳ね返り係数は、速度の受けた力積の方向成分で計算する。水平方向に4m/sで飛んできた物体が、鉛直方向に3m/s跳ね返った。この時の跳ね返り係数を計算せよ。



この物体の質量をmとすると、

衝突前の速度は(4,0)

衝突後の速度は(0,3)とする。

この衝突における力積は

$$m(0,3)-m(4,0)=(-4m,3m)$$

衝突前の速度の衝突面に対して直角方向の成分は

$$\frac{(4,0)\cdot(-4m,3m)}{|(-4m,\cdot 3m)|}=-\frac{16}{5}\text{m/s}$$

衝突後の速度の衝突面に対して直角方向成分は

$$\frac{(0,3)\cdot(-4m,3m)}{|(-4m,3m)|}=\frac{9}{5}\text{m/s}$$

跳ね返り係数は　$e=-\dfrac{\frac{9}{5}}{-\frac{16}{5}}=\dfrac{9}{16}=0.56$

(3)　電位への活用

電位とは+1Cの電荷を運ぶ仕事なので、$V=Ed$はベクトルの内積であらわされる式である。ベクトルでは

$$V=\vec{E}\cdot\vec{d}$$

である。

xyz空間で電場が(10,−5,2)のとき、+1Cの電荷を原点(0,1,0)から点(1,0,2)に移動させるときの仕事を計算せよ。

変位ベクトルは(1,0,2)−(0,1,0)=(1,−1,2)

電位は　(10,−5,2)・(1,−1,2)=10+5+4=19V

よって、+1Cの電荷を運ぶ仕事は　19J