M01　微分積分の活用

１．物理における微分の活用

⑴　差について

x座標A（x_1）、B（x_2）があり、AがBに移動したとき、その変位ABはx_2-x_1であらわされる。これをΔxという記号であらわす。Δとは「差」という意味のdifferenceの頭文字「d」に該当するギリシャ文字「Δ」である。ある要素の差を表す時は「Δ」という記号をつけてあらわす。

⑴　瞬間の速さについて

平均速度$\overline{v}$は変位を移動した時間で割れば求められる。記号であらわすと、変位（位置差Δx）をかかった時間（時間差Δt）で割ったもので、$\overline{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$とあらわされる。

これは、時間Δt間の平均速度（速度の平均）である。では、時刻tにおける瞬間速度はどのようにすると求められるのであろうか。少しでも時間がたつとその間に速度が変化するために、その時間の平均速度しか測定できないのである。そこで、その時間を非常に短い時間（$\dfrac{1}{100万}$秒とか$\dfrac{1}{1億}$秒）にとると、その時間内に速度の変化は無視できるほど小さいものとなる。瞬間の速度はΔtを限りなく短い時間にとったときの変位Δxであらわせばよいことになる。変化する要素に対して変化することができないほど短い区間で考えるというわけである。

限りなく0に近いΔtをdtという記号であらわすことにすると、その瞬間の変位Δxも限りなく0に近くなるのでdxとあらわすことができる。つまり、瞬間速度vは

$$v=\frac{dx}{dt}$$

となる。これが微分である。

一般に変化するものに対して変化できないほど短い区間をとることにより変化しないものとして考えて計算することができるようになる。これが、微分の考え方である。

＜例（数学）＞

関数$y=x^2$上の点A(x,x^2)における接線の傾きを求めよ。

＜解説＞

A(x,x^2)と少しずれたB（$x+dx,(x+dx)^2$））のAB間の傾きを求めればよい。

傾きは、ABが離れると平均の傾きとなるのでAB間が0に近ければ近いほど真値に近くなるのでdxを使うのである。

$$\frac{(x+dx)^2-x^2}{(x+dx)-x}=\frac{2xdx+dx^2}{dx}$$

dxは限りなく0に近い数値なので、$dx>>dx^2$となるのでdx^2の項は無視できる。

その結果、上の式は

$$\frac{2xdx+dx^2}{dx}=\frac{2xdx}{dx}=2x$$

となり、接線の傾きは$2x$となる。

数学では

$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{x+h-x}$に該当し、微分の定義そのものである。

＜例（物理）＞

時刻tにおける位置座標xが、t^2であらわされる運動をしている物体がある。この物体の時刻tにおける速度vと加速度aを計算せよ。

＜解説＞

速度は非常に短い時間における変位である。よって、

$$v=\frac{(t+dt)^2-t^2}{t+dt-t}=\frac{2tdt}{dt}=2t$$

加速度は非常に短い時間における速度変化である。

$$a=\frac{2(t+dt)-2t}{t+dt-t}=2$$

となる。これは、当然ながら微分公式であっさりと計算してもよい。

$$v=\frac{d}{dt}(t^2)=(t^2)'=2t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(2t)=2$$

２．積分の活用原理

変化するものに対して積の公式は使えない。「掛け算」というのは、同じ数字を足した時に簡略化して行うものである。たとえば、

$5+5+5+5+5+5=30$

であるが、5を5回足して30を求める人はいないであろう。5が6個あるので

$5\times 6=30$

と計算する。同じ数を足していくから掛け算なのである。

$x=vt$　（距離＝速さ×時間）

である。20m/sで10秒間走ったなら、200m走ったことになるが、20m/sという速さが途中で変わったのでは200m走ったことにならない。このように、移動する間に速さが一定であるから掛け算となる。

それでは、速さが一定でなかった場合どのようにして計算すればよいのであろうか。その計算手法が積分である。

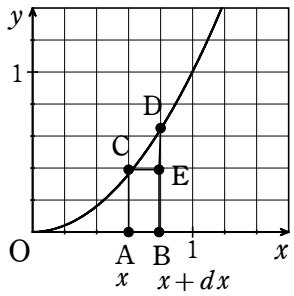
高等学校物理教科書では微積の考え方を徹底して避けている。数学を習っていなくても物理が理解できるようにするための配慮と思われるが、物理現象を微積を避けて説明すると反ってわかりにくくなるために、ここでは、あえて微積を使った説明をしている。

まずは、面積の計算で積分の考え方を活用してみよう。

xy平面上に$y=x^2$のグラフがある。このグラフと

$x=1$、$y=0$の直線で囲まれる部分の面積を求めてみよう。x軸上$0<x<1$の領域内に座標A$(x,0)$、B$(x+dx,0)$をとり、dxはきわめて0に近い値をとるものとする。

M01　微分積分の活用



Aからx軸に垂直な線を引きグラフとの交点をCとし、AC、ABを辺とする長方形ABCEを考える。
線分BEの延長線とグラフの交点をDとする。
OA間のグラフ下の面積を$S(x)$、OB間のグラフ下の面積を$S(x+dx)$とすると、図形ABCDの面積は

$S(x+dx)-S(x)$

dxは限りなく0に近い数値なので、図形CEDの面積は図形ABCDに比べてはるかに小さいために無視してよい。
よって、

$y(x+dx)dx=S(x+dx)-S(x)$

同様にして

$y(x)dx=S(x)-S(x-dx)$

$y(x-dx)=S(x-dx)-S(x-2dx)$

・・・・

$y(0)dx=S(dx)-S(0)$

辺々すべて加えると

$y(x)dx+y(x-dx)+\cdots+y(0)dx=S(x)-S(0)$　・・・　①

となる。

一方。

$y(x+dx)dx=S(x+dx)-S(x)$

$$y(x+dx)=\frac{S(x+dx)-S(x)}{dx}$$

dxは限りなく0に近いので、これは$y(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$と同じであり、$y(x)$は$S(x)$を微分したものである。積分は微分の逆演算なので$S(x)$は$y(x)$を積分したものとなる。
①の右辺は定積分を意味しており、左辺は微小短冊の総合計を意味している。よって、
「定積分とは、微小部分の面積を計算し、それを区間内ですべて総合計する演算である」ことがわかる。この視点で区間$0\leqq x\leqq 1$のグラフ下の面積を求めてみよう。

AC$=x^2$、AB$=dx$なので、図形ABCDの面積＝長方形ABCEの面積は

x^2dx

この微小面積を$0<x<1$の範囲ですべて合計すればよいので

$$\int_0^1 x^2dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

となる。

３．円の面積

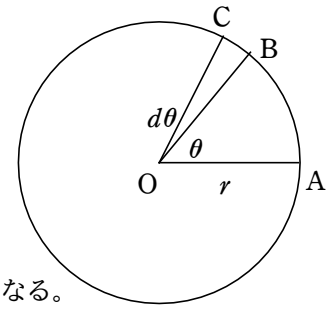
定積分とは細かく区切って総合計する演算であることを示したが、その区切り方は自由である。円の面積を例として何通りかの区切り方で面積を計算してみよう。

(1)　細長い扇形に区切る（中心角基準）

半径rの円Oの半径AOから角度θの円周上に点Bをとり、BOより微小角$d\theta$取った円周上に点Cをとる。

弧BCの長さは$rd\theta$である。$d\theta$は微小角のため、弧BCは直線と考えられ、また、∠OBC＝90°と考えてよい。そのため扇形OBCは直角三角形と扱うことができ、

△OBCの面積は$\frac{1}{2}r^2d\theta$となる。



円の面積はこの面積をθが0から2πまですべて合計したものとなる。

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}r^2\int_0^{2\pi}d\theta=\pi r^2$$

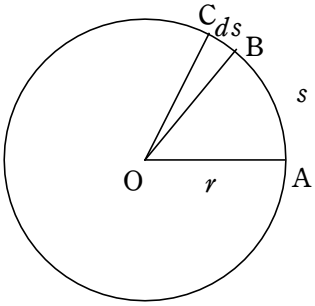
(2)　細長い扇形に区切る（弧長基準）

同じように細長い扇形に区切るのであるが、中心角ではなくて、円弧を基準に面積を求めることもできる。

Aからの弧長sの位置に点Bをとり、そこから微小な弧長ds離れた点にCをとる。

扇形OBCは直角三角形と考えてもよいのでこの面積は

$$\frac{1}{2}rds$$



これを$0\leqq s\leqq 2\pi r$で総合計すると、

$$\int_0^{2\pi r}\frac{1}{2}rds=\frac{1}{2}r\int_0^{2\pi r}ds=\frac{1}{2}r\Big[s\Big]_0^{2\pi r}=\pi r^2$$

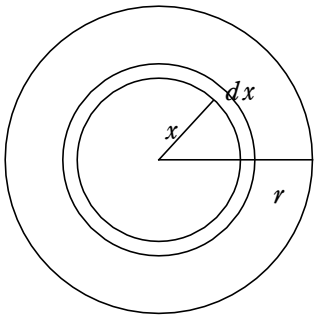
(3)　半径rの円内に半径$x\sim x+dx$の幅の部分を考える。

円周は$2\pi x$で、幅がdxであるので、この部分の面積は

$$2\pi xdx$$

この微小部分の面積を$0\leqq x\leqq r$まですべて合計すればよいので、

$$\int_0^r 2\pi xdx=2\pi\int_0^r xdx=2\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^r=\pi r^2$$



(4)　短冊切り

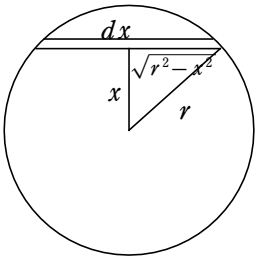
円の中心からx離れたところを水平に薄切りした幅dxの短冊を考える。この面積は図より

$$2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

これを、$-r\leqq x\leqq r$まですべて合計すればよい。

$$\int_{-r}^{r}2\sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

これは置換積分が必要である。



$x=r\sin\theta$ とおくと、

$dx=r\cos\theta d\theta$

積分区間は　$-r\leqq r\sin\theta\leqq r$ より、$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$、よって、$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

積分は

$$\int_{-r}^{r}2\sqrt{r^2-x^2}\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\sqrt{r^2-(r\sin\theta)^2}\,r\cos\theta d\theta=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta$$

$$=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta+2r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta$$

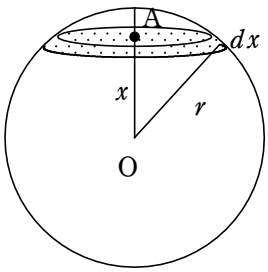
$$=2r^2\left[\frac{1}{2}\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+r^2\left[\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\pi r^2$$

(1)～(4)でわかる通りどのような区切り方をしても同じ面積が得られるが、区切り方によって難易度が異なる。

４．球の表面積･体積

(1)　球の体積

半径rの球Aにおいて中心Oからx離れたところに点Aをとり、そこからAOに垂直に厚さdxの円盤を切り取った。
dxは微小なので、この円盤は円柱と考えてよい。
この円盤の半径はを三平方の定理より、$\sqrt{r^2-x^2}$ となるので、
この円盤の底面積は$\pi(\sqrt{r^2-x^2})^2=\pi(r^2-x^2)$。
この円盤は円柱と考えてよいので、体積は$\pi(r^2-x^2)dx$となる。



球の体積はこの円盤の体積を$-r<x<r$の範囲ですべて合計したものである。

球の体積は

$$\int_{-r}^{r}\pi(r^2-x^2)dx=\pi r^2\int_{-r}^{r}dx-\pi\int_{-r}^{r}x^2dx=\pi r^2\Big[x\Big]_{-r}^{r}-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r}=\frac{4}{3}\pi r^3$$

⑵　球の表面積

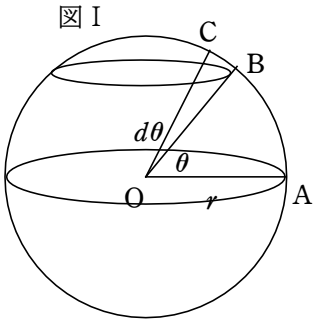
半径rの球Oの中心を通る円Aから角度θ取った位置に円Aと平行に円B、$\theta+d\theta$の位置に円Cを考える。
円Bと円Cに挟まれた部分の弧BCの長さは図Ⅱでわかる通り$rd\theta$であらわされる。
また、円の半径は$r\cos\theta$となるので、円周は$2\pi r\cos\theta$であらわされる。

側面積は図Ⅲのように円柱で考えてもよく

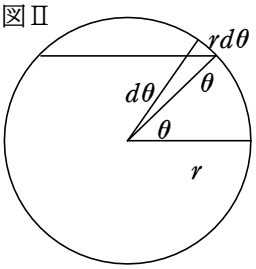
$2\pi r\cos\theta\cdot rd\theta$

と計算される。

図Ⅰ



図Ⅱ



これを、　$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$の区間ですべて合計すると、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2\cos\theta\, d\theta$$

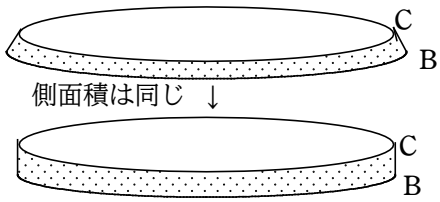
これは、

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2\cos\theta\, d\theta$$

$$=2\pi r^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta$$

$$=2\pi r^2\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=4\pi r^2$$

図Ⅲ



これが、球の表面積である。
この面積は球の体積をrで微分しても求められる。

球の内部半径xの厚さdxの球殻の体積は$\dfrac{4}{3}\pi(x+dx)^3-\dfrac{4}{3}\pi x^3$

これは表面積Sと厚さdxの積なので、

$$Sdx=\frac{4}{3}\pi(x+dx)^3-\frac{4}{3}\pi x^3$$

$$S=\frac{\frac{4}{3}\pi(x+dx)^3-\frac{4}{3}\pi x^3}{dx}$$

これは、微分の形をしている。