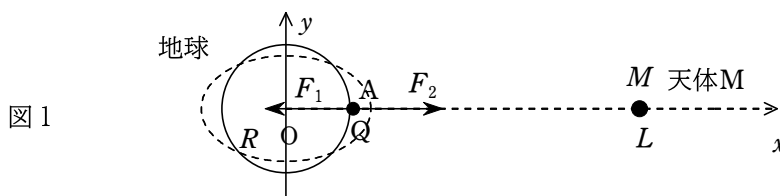


1

以下の文章は瀬戸内海の潮位差を理論的に算出したものである。文章中の(①)～(⑭)の[]内に文字が指定してある場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

地球の中心Oを原点として赤道面に座標軸 x を取り、赤道面の直角方向に y 軸、南北方向に z 軸を取る。座標を (x,y,z) のようにあらわす。質量1kgの物体に働く力はそのままする。物体Qの質量を1kgとして考えるものとする。

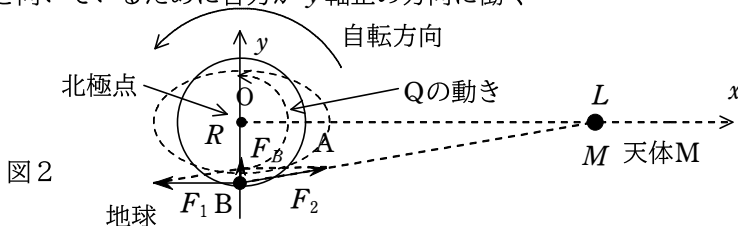
図1のように、質量Mの天体Mが $(L,0,0)$ の位置に存在しているとする。地球の表面 $x=R$ ($R,0,0$) の位置Aに物体Qがあるとす。地球の質量を M_E とすると、天体Mから地球に働く万有引力は(①[G,M,L,M_E])となるので、向心加速度(②[G,M,L])が x 軸正の方向に生じている。その結果Qには大きさ $F_1 =$ (③[G,M,L])の慣性力が x 軸負の方向に働いていることになる。QにはさらにMからの大きさ $F_2 =$ (④[G,M,L,R])の万有引力が x 軸正の方向に働いている。その結果、物体Qには重力以外に $F_2 - F_1$ の力が x 軸正の方向に働いていることになる。この力を潮汐力と呼んでいる。点線の楕円は海面を示す。



$L \gg R$ であることを利用して潮汐力 F_A を簡単にと

$$F_A = F_2 - F_1 = \text{(④)} - \text{(③)} = \frac{2GMR}{L^3}$$

この力 F_A が x 軸正の方向に働いていることになる。この F_A が満潮を引き起こす力である。自転により赤道Aと直角となる位置B(0, -R, 0)にQが移動すると F_2 が天体Mの方向を向いているために合力が y 軸正の方向に働く



この場合の潮汐力を F_B とすると、 $\triangle OMB$ と F_B, F_1 が作る三角形の相似を用いて、 $\frac{F_B}{F_1} = \frac{R}{L}$ とおけるので、 $F_B =$ (⑤[G,M,R,L])となる。この力が干潮を引き起こす力となる。

満潮と干潮の潮位差はこの力をもとに計算できる。満潮時は水面鉛直上向きに F_A の潮

G076瀬戸内海の潮汐

汐力を受け干潮では鉛直下向きに F_B の潮汐力を受けている。その力の差は $F_A + F_B = \frac{3GMR}{L^3}$ となり、この時の重力加速度が同じになるように潮位が変わると考えれば、潮

位差 h_m を求めることができる。干潮時の半径を R とし、潮汐力の差が重力の差と等しいとおけば、地表に物体Qがあるとき、この物体Qが地球から受ける万有引力の大きさ F_3 は $F_3 = \textcircled{6}[G, M_e, R]$ であり、海水面が h_m 上昇したときの海面上にあるQに働く万有引力の大きさ F_4 は $F_4 = \textcircled{7}[G, M_e, R, h_m]$ である。この差が潮汐力の大きさとなる。 $R \gg h_m$ と考えて計算すると

$$3 \frac{GM_m R}{L^3} = F_3 - F_4 = \textcircled{6} - \textcircled{7} = \frac{2GM_e R h_m}{R^4}$$

この式より h_m を求めると、

$$h_m = \frac{3M_m}{2M_e} \left(\frac{R}{L} \right)^3 R$$

となる。 $\frac{M_m}{M_e} = \frac{1}{81.3}$ 、 $R = 6.38 \times 10^6 \text{m}$ 、 $L = 3.85 \times 10^8 \text{m}$ を代入すると、

$$h_m = \frac{3M_m}{2M_e} \left(\frac{R}{L} \right)^3 R = 0.540 \text{m}$$

太陽からの潮汐力による潮位差 h_s は $\frac{M_m}{M_e}$ を太陽と地球の質量比 $\frac{M_s}{M_e} = 3.33 \times 10^5$ 、 L を地球太陽間の距離 $L = 1.50 \times 10^{11} \text{m}$ と置き換えれば求められる。計算すると、 $h_s = 0.245 \text{m}$ となり、月による潮汐力の0.45倍であることがわかる。

$h_m = 0.540 \text{m}$ という値は赤道上の理論値であるが、瀬戸内海の実際の潮汐差2m～3mと比べてあまりにも小さい。次は瀬戸内海の潮位差を概算で求めてみよう。以降は月のみの潮汐力を考えるが、大潮時の最大の潮汐力は月の潮汐力に太陽の潮汐力を加えたものであるから月の潮汐力を $(\textcircled{8}[\text{数値}])$ 倍すれば求めることができる。

潮汐力は地球の向心加速度による慣性力と月からの万有引力の合力である。この合力の方向は図2のように x 軸方向だけでなく、 y, z 方向にも存在する。この潮汐力の地球表面の南北方向、東西方向、鉛直方向に分解する必要があるがその計算はきわめて複雑である。

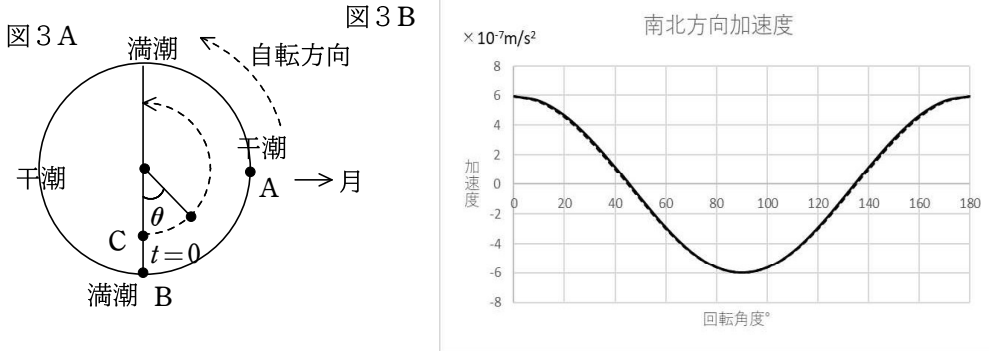
地球上の海水はほぼ単振動をしている。その結果、定常波を形成していると考えてよい。ある場所が満潮なら同時に別の場所が干潮になっている。先ほどの潮位差は海水が瞬時にして動くとは仮定した場合の計算であるが、実際は海水が移動するのに時間がかかるため月が南中しているときが満潮とは限らない。

単振動と考えれば、鉛直上向きに最大の潮汐力がかかっている図1のA点は干潮のはずである。そして、図2のB点が満潮となる。そして、干潮と満潮の時は海水が静止している時となる。

今、四国南方海上北緯32度付近の四国海盆（南海トラフ）の水深4500mの海域の潮汐力を考えるとする。この海域が、図2のBに該当する位置の時、満潮であったとする。図3AのようにBと同じ経度の北緯32度の位置に物体Qをおくと、この物体に働く潮汐力はそ

G076瀬戸内海の潮汐

のまま加速度となる。



物体Qに働く潮汐力（慣性力と月からの万有引力の合力）を高精度に計算し、その南北方向成分を示したのが図3Bの実線である。正が北方向、負が南方向を示している。この実線はコサインのグラフに似ている。そこで、最も合致する三角関数で近似したのが破線のグラフであり、ほぼ一致している。この三角関数を以降近似値として用いることにする。

$$a = a_0 \cos \theta \quad a_0 = 5.96 \times 10^{-7} \text{m/s}^2$$

ここで地球が自転しているために θ は少しずつ大きくなる。通常180度回転するのに6時間であるが、月の公転も考慮すると干潮から干潮まで12時間25分となる。これを秒に換算すると $T_1 = 4.77 \times 10^4 \text{s}$ となり、角速度 ω を求めると $\omega = (9[T_1]) = 6.59 \times 10^{-5} \text{rad/s}$ となる。図3AのCの位置にQがあるときを $t=0$ とすると、 $\theta = \omega t$ となるので、四国海盆の海水の南北方向の加速度は

$$a = a_0 \cos \omega t$$

となる。速度を v とすると、 $a = \frac{dv}{dt}$ と微分形で表記できるので、南北方向の海水の速度は積分すると求められる。

$$v = \int a_0 \cos \omega t dt = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t + \text{積分定数} \quad \text{で表される。}$$

（単振動の式より $x = A \sin \omega t$ のとき、 $v = \frac{dx}{dt} = A \omega \cos \omega t$ となるので、

$$\int A \omega \cos \omega t dt = A \sin \omega t \text{ であることは予想できる。ここで、} A = \frac{a_0}{\omega} \text{ とおけばよい）}$$

$t=0$ のとき、満潮と仮定しているので、 $v=0$ である。よって、積分定数は0となる。

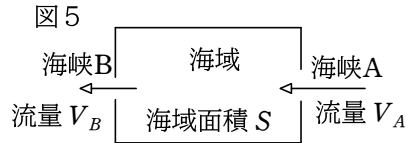
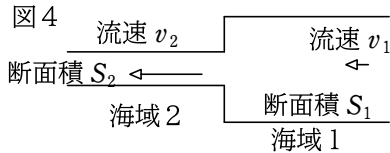
最大速度 $v_0 = (10[a_0, \omega]) = 4.24 \times 10^{-3} \text{m/s}$ となり、四国海盆では海水の潮汐力による最大流速は4.24mm/sと非常に遅いものとなる。

この海水が瀬戸内海に流れ込んで瀬戸内海の潮位変化を引き起こしていると考えられるが、瀬戸内海の潮流は数m/sとなり、これよりはるかに遅い。これらのことも考えて瀬戸内海の潮流・潮位差がどの程度のものかを推定してみよう。

図4のように断面積 S_1 、流速 v_1 の広い海域1から断面積 S_2 、流速 v_2 の狭い海域2に海水が流れ込む場合、両海域の海水の移動量は同じなので、 $v_2 = (11[S_1, S_2, v_1])$ が成立する。また、図5のように海域面積 S の海域に干潮から満潮まで海峡Aから体積 V_A の海

G076瀬戸内海の潮汐

水が流れ込み、同時に海峡Bから体積 V_B の海水が流れ出た場合、その差の分だけ海域内の海水の体積が増加し、これが、海域内の水位を押し上げている。これが潮位差 h となる。 $h = (12[V_A, V_B, S])$ が成立している。これらの式を用いて瀬戸内海の潮位差を求めよう。



四国海盆の水深が4500mであり、紀伊水道の平均水深が40m程である。(11)より、流速は112倍となり、最大流速は0.47m/sとなる。時速に換算すると1.69km/hとなる。紀伊水道の最大流速は2.74km/h程度と測定されている。この時、海底の海水が重力に逆らって上昇するので位置エネルギーが増加するが、背後に膨大な海水があるために、これらの海水の運動エネルギーから少しずつ得ており、この時の位置エネルギーの変化は考えなくてよいものとする。

南海トラフの地震で海水の移動が生じると、その潮流の速さが単純計算で112倍となるので、大きな被害が予想される。これが津波である。

ここで、計算したのは月による潮汐力のみであり、太陽による潮汐力を加えた大潮時の流速は(8)倍して2.45km/hとなり、実測値に近い値となる。値の食い違いは、紀伊水道が水深だけではなく、周りより狭くなっているために、計算値よりも速くなっていると考えられる。

ある海域に流れ込む海水量を計算するのは最大流速ではなく平均流速が必要となるが、海底との摩擦や時間変化などが必要となり、正確に求めるのは難しいので、簡易的に最大流速の $\frac{1}{2}$ と仮定して計算することにする。

図6のように瀬戸内海には東の紀伊水道から入ってきた海水と、西の豊後水道から入ってきた海水が広島県と岡山県の県境付近でぶつかっている。その衝突ラインを分水嶺と呼んでおり、分水嶺より東側を東瀬戸、西側を西瀬戸と呼んでいる。関門海峡は豊後水道の流入量よりもはるかに少ないのでここでは無視している。

大阪湾には由良瀬戸から海水が流れ込み明石海峡から海水が流れ出る。断面積 S [km²] と平均流速 $\bar{v}$ [km/h] より、1時間当たりの通過量 D [km³/h] は $D = (13[S, \bar{v}])$ で求められ、干潮から満潮までの総通過量 V はこれに干潮から満潮までの時間 $T_2 = 6$ 時間12分 = 6.2hを掛ければよい。よって、 $V = (14[D, T_2])$ である。各海峡の流量を示したのが表1であり、これをもとに(12)式で東瀬戸・西瀬戸の推定潮位差を計算したのが表2である。大潮潮位差はこれを(8)倍したものである。これらの数値は実測値の範囲内に入っている。

G076瀬戸内海の潮汐

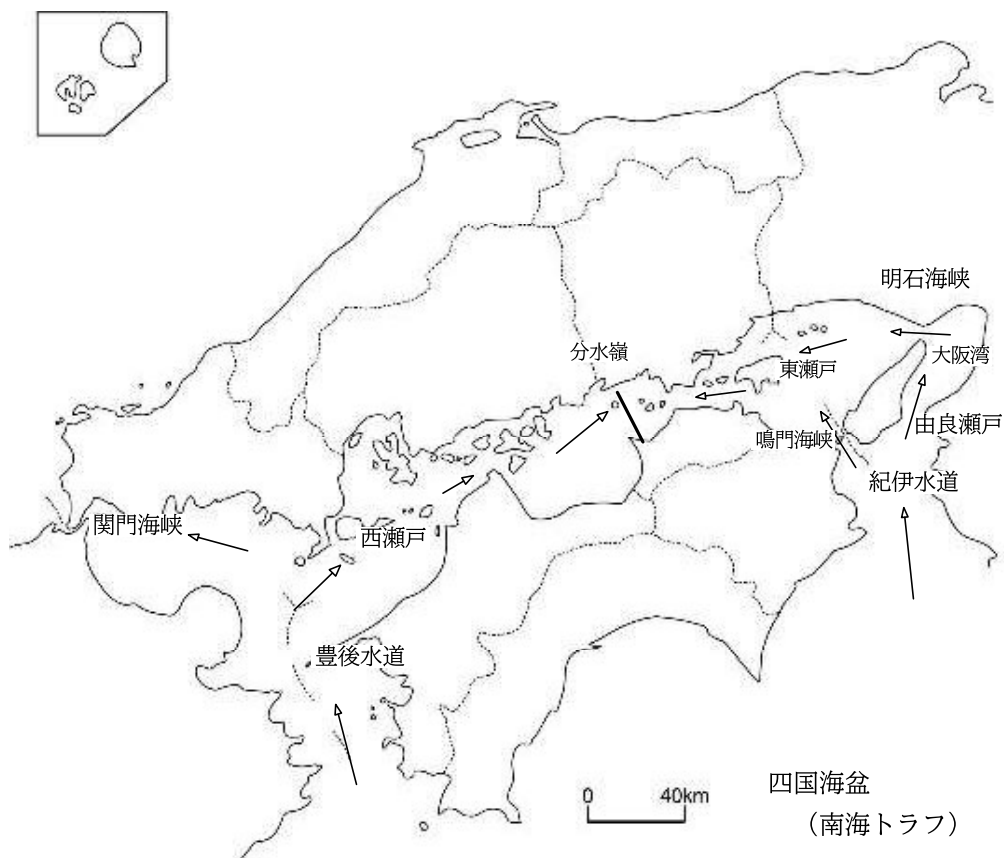
表1 各海峡の海水通過料推測

海峡	断面積	平均流速	通過量	総通過量
	km ²	km/h	km ³ /h	km ³
鳴門海峡	0.02	8.17	0.18	1.12
明石海峡	0.21	5.22	1.10	6.87
豊後水道	0.91	5.40	4.93	30.8
関門海峡	0.013	7.81	0.10	0.63
紀伊水道	1.40	1.37	1.93	12.1
由良瀬戸	0.42	3.20	1.35	8.43

表2 各海域推定潮位差

	海域面積	流入量	流出量	推定潮位差	大潮潮位差	実潮位差
	km ²	km ³	km ³	m	m	m
大阪湾	1450	8.43	6.87	1.08	1.57	0.5～1.5
東瀬戸	4483	7.99	0	1.78	2.58	1～3
西瀬戸	11993	31.4	0	2.62	3.80	2～4

図6 瀬戸内海周辺の海域名



G076瀬戸内海の潮汐

解説

- ① 万有引力の法則 $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$ より $\frac{GM}{L^2} M_E$
- ② 運動方程式 $ma = F$ より、①より M_E を除いたのが加速度 $\frac{GM}{L^2}$
- ③ Qの質量は1kgなので、加速度がそのまま力となる。 $\frac{GM}{L^2}$
- ④ Qと天体Mの距離が $L - R$ なので、万有引力の法則より、 $\frac{GM}{(L - R)^2}$
- ⑤ $\frac{F_B}{F_1} = \frac{R}{L}$ より、 $F_B = F_1 \frac{R}{L}$ 。 $F_1 = \frac{GM}{L^2}$ なので、 $F_B = \frac{GMR}{L^3}$
- ⑥ 1kgQが地球から受ける万有引力なので、万有引力の法則より $\frac{GM_e}{R^2}$
- ⑦ 海水面が h_m 上昇しているので地球中心からの距離は $R + h_m$ よって、万有引力の法則より、 $\frac{GM_e}{(R + h_m)^2}$
- ⑧ 太陽の潮汐力は月の0.45倍なので、月と合わせると 1.45
- ⑨ 半周（180度＝ π rad）回転する時間が T_1 なので、 $\omega = \frac{\pi}{T_1}$
- ⑩ $v = \int a_0 \cos \omega t dt = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega t + \text{積分定数}$ より、最大速度 v_0 は $\frac{a_0}{\omega}$ であることがわかる。
 <別解>
 最大速度 $v_0 = A\omega$ であり、最大加速度 $a_0 = A\omega^2$ なので、これらより、 A を消去すると $v_0 = \frac{a_0}{\omega}$ となる。
- ⑪ 流れ込む量は同じなので、 $S_1 v_1 = S_2 v_2$ となる。よって、 $\frac{S_1}{S_2} v_1$
- ⑫ 海域内で増加する海水の体積は $V_A - V_B$ となる。よって、水位の上昇は $\frac{V_A - V_B}{S}$
- ⑬ 単位時間の通過量なので平均の速さと断面積の積となる。 $\bar{S} \bar{v}$
- ⑭ D が単位時間の通過量なのでこれに時間をかけるとそう通過量となる。 DT_2