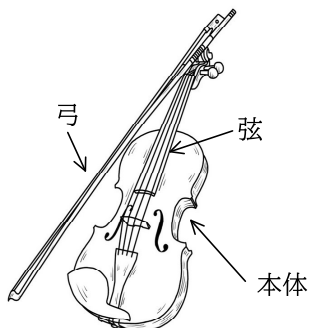


G075バイオリン

1

バイオリンの仕組みについて理論的に論じた以下の文章の(①)～(⑩)内の[]に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。また、アンダーライン部に関して後の問いに答えよ。

図1



バイオリンは、図1のようにバイオリン本体に弦を張り、その弦を弓で弾く楽器である。弦を指で弾くのと、弓で弾くことの違いを考えてみよう。

まずは、弦を伝わる波の速さを求めてみよう。

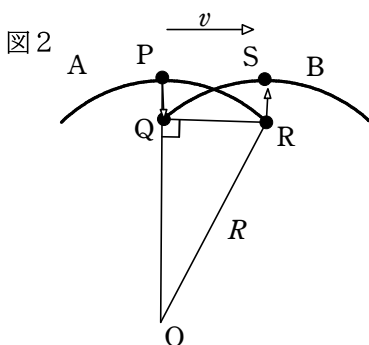


図3

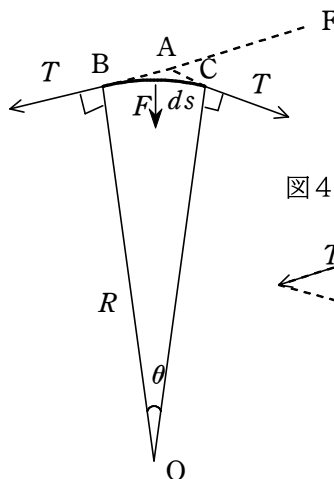


図4

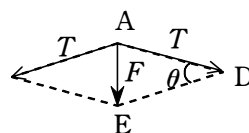


図2において、Aの波が右方向に速さ v で平行移動し、時間 Δt 後Bの波になったとする。このとき、波が右方向に動いても、媒質は縦方向に単振動しているため、Aの山の位置の媒質Pは Δt 後 Q点に移動している。また、最初Rにあった媒質は Δt 後、山であるSに移動する。この場合、波A,Bは弦の一部であるので円弧と考えても差し支えない。波Aの中心(山)をOとする。

$QR = (① [v, \Delta t])$ が成立。媒質Pの加速度は非常に短い時間であるから一定と考え、その大きさを a とする。P点は最上端であるから、ここでの媒質の速度は0である。その結果 $PQ = (② [a, \Delta t])$ となる。

波形Aは円弧であるから、半径を R とすると、 $OP = OR = R$ である。三平方の定理より、 $OQ^2 + QR^2 = OR^2$ である。その結果

$$(R - (②))^2 + (①)^2 = R^2$$

G075バイオリン

展開して簡単にすると、 $-Ra + \frac{1}{4}a^2\Delta t^2 + v^2 = 0$ となるが、 Δt は微小量であるから、他の項に対して無視すると、

$$a = \frac{v^2}{R} \quad (\text{i})$$

となる。この式は等速円運動の向心加速度と同じ式である。単振動は等速円運動を真横から見た運動なので、これは、当然といえる。次に、図3のBCのように、線密度（1mあたりの質量）を ρ 、長さ Δs の弦の一部を考える。弦の質量は線密度が ρ なので、この部分の質量 m は

$$m = (\textcircled{3})[\rho, \Delta s] \quad (\text{ii})$$

である。この弦は先ほどと同じく円弧と考えてよい。図3のように両端B、Cから、張力 T で引張った場合、その合力で弦の一部はOに向けて加速度運動をする。この加速度の大きさが a である。

2本の張力をA点に集めたのが図4である。 $\angle BOC = \angle ADE$ であり、この角は微小角なので扇形 $OBC \sim \triangle DEA$ といえる。三角形の相似により $R:\Delta s = T:F$ が成立するので、

$$F = \frac{T}{R}\Delta s \quad (\text{iii})$$

(i)(ii)(iii)より、運動方程式を立てると、 $ma = \rho ds \cdot \frac{v^2}{R} = \frac{T}{R}ds$ となり、これを解くと、

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{iv})$$

これが、弦を伝わる波の速さである。

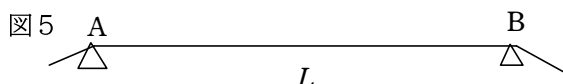


図5のように、2点を固定された弦ABを振動させると基本的に基本振動が生じる。ここでは基本振動のみについて考えてみよう。

A点、B点ともに固定されているので、弦を伝わる波がA、Bで反射するときは固定端反射する。固定端反射を繰り返す往復する波の定常波を作る条件式は波の波長を λ 、弦の長さを L とすると、AB間は $\frac{\lambda}{2}$ なので、 $\lambda = (\textcircled{4})[L]$ が成立する。

(iv)および、弦の振動数を f とすると、 $v = f\lambda$ より、

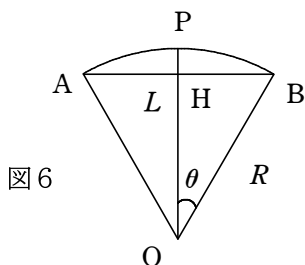
$$f = \frac{1}{(\textcircled{4})} \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad (\text{v})$$

となる。

次にこの弦の振動が単振動であるかどうか考えてみよう。弦は微小振動をしており、弦の形は円弧であると仮定する。この状態を図示したのが図6である。ABの中点をH、円弧の中心をOとする。図6における弦の中点での変位はPHであり、これを x とする。

$\angle BOP = \theta$ とすると、 $BH = \frac{L}{2} = R\sin\theta$ 、 $PH = x = R(1 - \cos\theta) = 2R\sin^2\frac{\theta}{2}$ ここで、

$\theta \cong 0$ と考えられるので、 $\sin \theta \cong \theta$ と置き換えが可能である。



$\sin \theta$ を θ と置き換えて θ を消去すると、 $R = \frac{L^2}{8} \frac{1}{x}$ が成り立つ。(i)に代入すると、

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{8v^2}{L^2} x$$

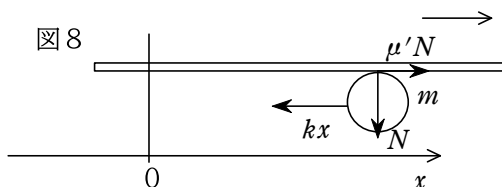
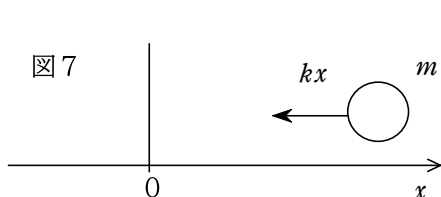
となり、弦の振動は単振動と考えられる。

単振動の加速度の大きさは角振動数を ω とすると、(5) [ω, x] と表わされるので、

$$\omega = 2\sqrt{2} \frac{v}{L} \text{ となる。 (iv) を代入すると } \omega = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{2T}{\rho}} \text{ となり、振動数 } f = \frac{1}{\pi L} \sqrt{\frac{2T}{\rho}}$$

となる。

次に単振動している弦を弓で弾くときどうなるかを考えてみよう。簡単のために弦を質量 m の物体として考えることにする。



原点を釣り合いの位置とし、図7は弦を弓で引かない状態を示しており図8は弓で引いた場合を示している。原点からの距離 x に比例する復元力 $-kx$ が働いているとする。この物体の運動は単振動である。この単振動の角振動数を ω とすると、復元加速度は

(5) となるので、運動方程式 $-m\omega^2 x = (6) [k, x]$ が成立する。この運動方程式を解くと $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ となり、振動数 $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ となる。

図8のようにこの物体に弓を垂直抗力が N となる一定の力で弦を押さえながら x 軸の正の方向に一定の速さで動かす場合を考えてみる。図9はこの時の弦の動きを模式的に表したものである。弓で弾く前の弦の位置をAとし、弓を右向きに一定の速さ V で動かすと、弦は弓から動摩擦力を受けて右向きに動き始め、動摩擦力との釣り合いの位置Bを通過する。その後AC間で弦は振動することになる。

弓が弦を押す力（垂直抗力）の大きさを N とし、動摩擦係数を μ' とすると、弦が弓から受ける動摩擦力の大きさは (7) [μ', N] である。

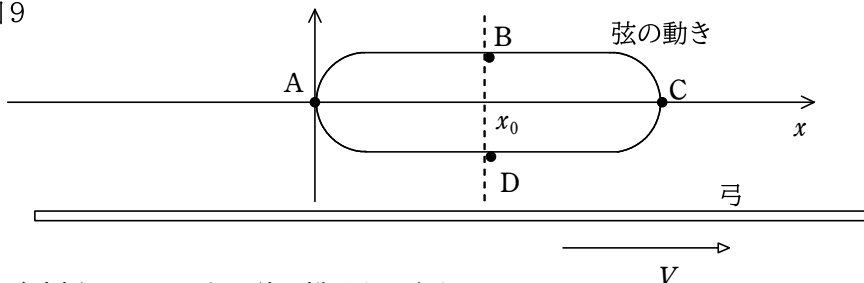
弦がB点にあるとき、弦の復元力と動摩擦力が釣り合っている。 x 座標を x_0 とすると、

G075バイオリン

$$kx_0 = \textcircled{7}$$

が成り立つ。

図9



弦が座標 x にあるとき、弦に働く力の合力 F は

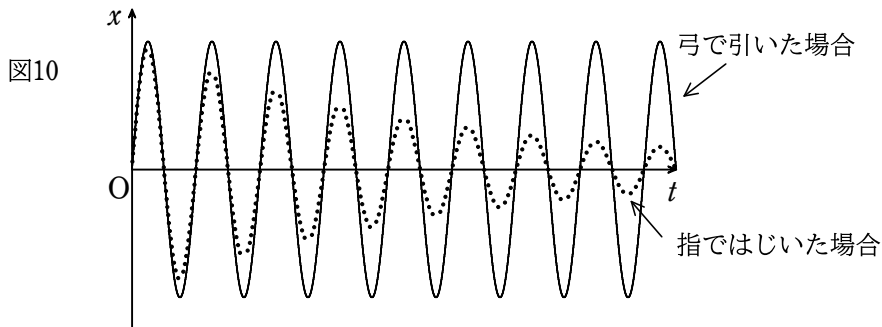
$$F = \textcircled{7} + \textcircled{6}$$

となり、 $X = x - x_0$ と置くと、 $x = X + x_0$ となり、

$$F = \textcircled{7} - k(X + x_0) = -kX$$

となり、これは単振動である。運動方程式を立てると $-m\omega^2 X = -kX$ である。その結果、振動数は $f = \textcircled{8}[k, m]$ となり、これは弓で引かない場合と同じ振動数である。A点で静止状態だった弦が単振動しているのでA点での弦は常に静止状態になっている。B,Dは釣り合いの位置なので最大の速さとなり、C点の x 座標は $\textcircled{9}[x_0]$ である。この単振動の振幅は常に $\textcircled{10}[x_0]$ であり、減衰が起こらない。

N を大きくすると x_0 が大きくなるので弦を強く押せば音が大きくなり、弱く押せば音が小さくなると推定される。バイオリンは音の大きさも自在に変更できるのである。この結果、バイオリンは弓で弾いても、指で弾いた時と音の振動数は同じであり、かつ振幅は一定であるために減衰しないことがわかる。通常弦楽器は指で弾くと減衰するので、バイオリンは減衰しない優れた弦楽器であることがわかる。



弦を指で弾いた場合が破線で、弓で引いた場合を実線のグラフであらわしたのが図10である。

問い 文中アンダーラインが引いてある部分に単振動であると書かれているが、なぜ、単振動であることがわかるのか簡単に説明せよ。

G075バイオリン

解説

① $v\Delta t$

② 初速度0。加速度 a で時間 Δt の変位なので、速度が $a\Delta t$ となり、平均速度は $\frac{1}{2}a\Delta t$ と

なるので、 $\frac{1}{2}a\Delta t \times \Delta t = \frac{1}{2}a\Delta t^2$ (公式 $x = v_0t + \frac{1}{2}at^2$ を用いてもよい)

③ ρ の意味が1m当たりの質量なので、長さ Δs をかければよい。 $\rho\Delta s$

④ $\frac{\lambda}{2} = L$ より、 $2L$

⑤ 復元加速度なので、 $-\omega^2 x$ (x の方向と逆なので-が必要)

⑥ フックの法則より $-kx$ (x の方向と逆なので-が必要)

⑦ $\mu' N$

⑧ 運動方程式 $-m\omega^2 X = -kX$ を解くと、

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{となり、} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

よって、 $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

⑨ AB間が振幅なので、AC間はその2倍 $2x_0$

⑩ 振幅はAB間なので、 x_0

問い 復元力が変位と逆方向で変位の大きさに比例しているため。