

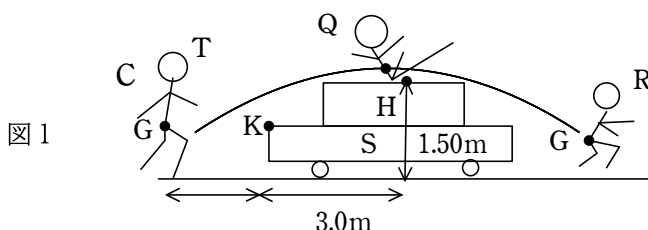
G074自動車飛び越え

1

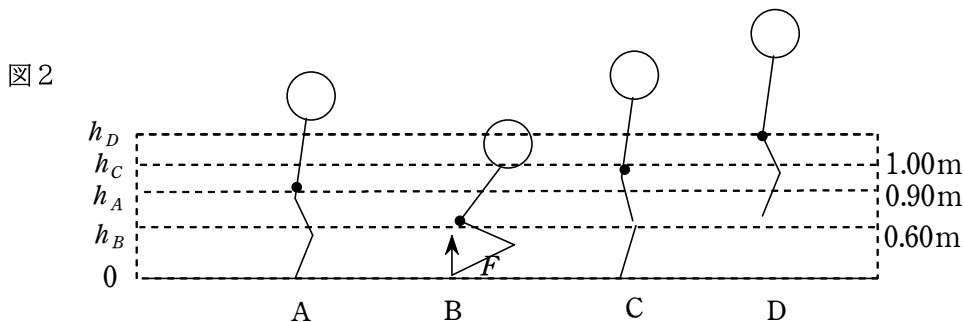
空手の達人の中には、自分めがけて走ってくる自動車の上を飛び越える神業を成し遂げることができる人物がいる。このようなことが実際に可能なのか物理的に考えてみよう。

以下の文章の(①)～(⑬)の[]内に文字が示されている場合はその文字を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

図1は空手家Tが車高1.50mの車Sの上を飛び越える時の車の運転手から見た視点で描いた図である。この車を飛び越えるには人体の重心の位置が腰の位置にあることから、高さ1.70mほど飛び上がる能力が必要であることになる。



この問題を解くために、まずは人の垂直跳びの能力について考えてみよう。図2は質量 m のある人が垂直跳びをしている状況を段階ごとに図で示したものである。Aは飛ぶ前の自然体の状態。Bは飛ぶ直前に一瞬しゃがんでいる状態、Cは地面から足が離れる直前の状態。Dは最高点に上がった状態である。A～Dの黒点は重心の位置を示している。A、B、C、Dの各状態の重心の地面からの高さをそれぞれ h_A 、 h_B 、 h_C 、 h_D とし、重力加速度の大きさを g とする。この車飛び越えを成功させるためには $h_D = 1.70\text{m}$ 以上が必要条件となる。



この人に働いている重力の大きさは mg であり、垂直跳びの記録は $h_D - h_A$ である。 h_C の位置を位置エネルギーの基準とするとCの重力による位置エネルギーは0で、Dの位置の重力による位置エネルギーは (①[m, g, h_C, h_D]) となる。Dの位置では静止しているので運動エネルギーは0である。Cにおける上向きの速さを v とすると、Cにおける運動エネルギーは (②[m, v]) で表される。

G074自動車飛び越え

エネルギー保存則より (2) = (1) が成り立つ。これを解くことにより、 v を求めることができる。 $v = \sqrt{2g(h_D - h_C)}$ となる。

BとCの間で上向きの力 F がこの人に仕事をしている。この運動エネルギーはBC間で上向きの力 F がする仕事によって得られる。BC間で鉛直方向に動いた距離は $h_C - h_B$ なので、この時の力 F が一定であるとする、この力 F がBC間でする仕事は (3) $[F, h_C, h_B]$ となる。この仕事とBC間で重力がした仕事

(4) $[m, g, h_C, h_B]$ がCでの運動エネルギーとなる。

$$(3) + (4) = (1)$$

が成り立つ。これを解くと、 $F = mg \frac{h_D - h_B}{h_C - h_B}$ [i]となる。これが、この人が地面を蹴る力の大きさとなる。

ある人の記録によれば $h_A = 0.90\text{m}$ 、 $h_C = 1.0\text{m}$ 、 $h_B = 0.60\text{m}$ 、片足のジャンプ力は鍛えた人で $1.2mg$ とされており、両足で $F = 2.4mg$ となる。よって、[i]より、 $2.4mg = mg \frac{h_D - 0.60}{1.0 - 0.60}$ となる。これを解くと $h_D = 1.56\text{m}$ となる。この人の垂直跳びの記録は66cmとなる。

これでは車を飛び越えるのは不可能であり、さらに高く飛べる工夫が必要である。Bの状態では腕をしっかりと振っている場合を考えてみよう。この状態の腕の質量は体重の0.06倍とされており、 $0.06m$ となる。平均の速さ u で動かしているとすれば、その運動エネルギーは (5) $[m, u]$ である。これが重力による位置エネルギーの増加となる。 $mg\Delta h = (5)$ となるので、記録が $0.03 \frac{u^2}{g}$ ほど伸びる計算である。 $u = 3.0\text{m/s}$ 程度と推定されるので、腕を振ることによる記録の上昇は $\Delta h = 0.03\text{m}$ 程度で $h_D = 1.59\text{m}$ となり、この状態では、自動車を飛び越えることはできない。

次に上半身を前かがみにしてその反動を考えてみよう。上半身の胴体の質量は体重の43%程度といわれているので、その質量は $0.43m$ である。上半身胴体が h_A から h_B の状態に下がるときに上半身がばねになっていると仮定（反動の利用）して、位置エネルギーが体内に蓄えられ、運動エネルギーに変化すれば、そのエネルギーは (6) $[m, g, h_A, h_B]$ となる。これが垂直跳びの記録上昇になるとすれば、 $mg\Delta h = (6)$ となり、 0.19m ほど記録が伸びることになる。これを利用した記録は $h_D = 1.78\text{m}$ となり、やっと車を飛び越えることが可能な高さとなる。この時の垂直跳びの記録は (7) [数値] cm となる。

この時足に働く力は[i]より、 $mg \frac{h_D - h_B}{h_C - h_B} = \frac{1.78 - 0.60}{1.00 - 0.60} mg = 3.0mg$ となる。

上向きの加速度の大きさを a とすると運動方程式は $ma = (8) [m, g]$ と

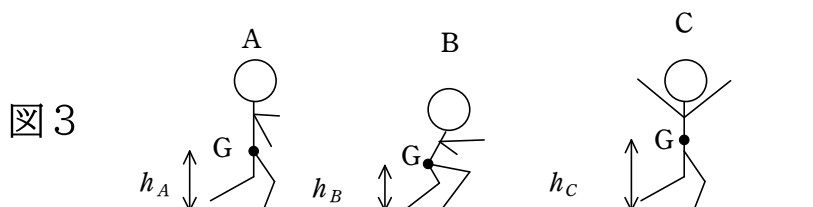
G074自動車飛び越え

なるので、上昇時の加速度は $a=2.0g=19.6\text{m/s}^2$ となる。

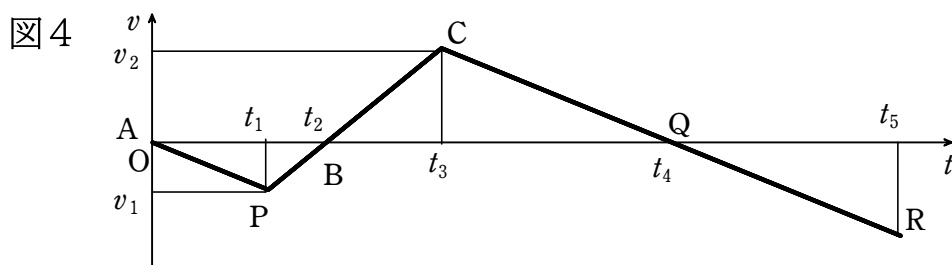
この垂直跳びの能力を持つ人Tが車Sの飛び越えにチャレンジしてみることにする。速さ v_0 で自分めがけて走ってくる車高1.50mの自動車Sの屋根の上を飛び越える場合を考えてみよう。

Tがジャンプしている間に車SがTの体の下を通過すれば、この神業は実現する。車Sの運転手から見たTの動きを示したのが図1である。Tが上向きにジャンプした瞬間をPとし、Qで最上端に達し、Rで着地したとする。

まず、重要なのはジャンプするタイミングである。早すぎても遅すぎても車SにTはぶつかることになり命はない。このタイミングを計算するために、P点でのTの動きを考えてみよう。自然体の状態AであったTは自動車が接近してくると、一時しゃがみこんだ(状態B)。この時の重心Gの高さは h_B となる。その後全身を伸ばしてジャンプし、足が離れた瞬間(状態C)の重心の高さは h_C である。図3はその動きを示したものである。



Tは時刻 $t=0$ にAの状態より、力を抜いて背を低くする。この段階は自由落下と仮定する。 $t=t_1$ にPで最大速度に達し、以降、足に一定の最大限の力を入れて上向きに加速する。 $t=t_2$ にBで最下点となり、この時に静止する。継続して上向きに加速し $t=t_3$ でC点で足が地面から離れる。以降、重力加速度による等加速度運動で、 $t=t_4$ に最高点Qに達し $t=t_5$ にRで着地する。この状態を $v-t$ グラフに示したのが図4である。以降 $t_1\sim t_5$ 、 v_1 、 v_2 を求めることにする。



時刻 t_0 で速さ v_0 、加速度 a としたときの時刻 t における速度は一次関数となり、

$$v=v_0+a(t-t_0) \quad \text{ii}$$

頂点の高さを h_0 、加速度を a 、頂点に達する時刻を t_0 とすると、時刻 t における高さ h は二次関数の標準形を用いて、

G074自動車飛び越え

$$h = h_0 + \frac{1}{2} a(t - t_0)^2 \quad \text{[iii]}$$

と置くことができる。これを利用して、各 구간ごとに一次関数と二次関数を求めてみよう。頂点では $v=0$ である。

まずはAP間を考えてみよう。この区間は $a = -9.8\text{m/s}^2$ で、A点が頂点で $t=0$ 、 $h=0.90\text{m}$ 、 $v=0$ であり、P点で $t=t_1$ 、 $h=h_1$ (P点の高さ)、 $v=v_1$ なので、[ii]、[iii]より、

$$v_1 = (\textcircled{9}[t_1]) \quad \text{[ii-1]} \quad h_1 = 0.90 - 4.9 t_1^2 \quad \text{[iii-1]}$$

PB間では $a = 19.6\text{m/s}^2$ で、P点が $t=t_1$ 、 $v=v_1$ 、 $h=h_1$ 、B点が頂点で $t=t_2$ 、 $h=0.60\text{m}$ 、 $v=0$ を用いると、[ii]、[iii]より、

$$0 = v_1 + 19.6(t_2 - t_1) \quad \text{[ii-2]} \quad h_1 = (\textcircled{10}[t_1, t_2]) \quad \text{[iii-2]}$$

[ii-1]、[iii-1]、[ii-2]、[iii-2]を連立させて解くと、 $v_1=1.98\text{m/s}$ 、 $t_1=0.202\text{s}$ 、 $t_2=0.303\text{s}$ 、 $h_1=0.700\text{m}$ となる。

PC間ではC点で $t=t_3$ 、 $h=1.00\text{m}$ 、 $v=v_2$ とすると、[ii]、[iii]より、

$$v_2 = v_1 + 19.6(t_3 - t_1) \quad \text{[ii-3]} \quad 1.00 = 0.60 + 9.8(t_3 - t_2)^2 \quad \text{[iii-3]}$$

[ii-3]、[iii-3]を連立させて解くと $t_3=0.503\text{s}$ 、 $v_2=3.91\text{m/s}$ となる。

CR間では $a = -9.8\text{m/s}^2$ である。Q点が頂点で $t=t_4$ 、 $h=1.78\text{m}$ 、 $v=0$ であり、R点で $t=t_5$ 、 $h=1.00\text{m}$ なので、[ii]、[iii]より、

$$0 = 3.91 - 9.8(t_4 - t_3) \quad \text{[ii-4]} \quad 1.00 = 1.78 - 4.9(t_5 - t_4)^2 \quad \text{[iii-4]}$$

[ii-4]、[iii-4]を連立させて解くと、 $t_4=0.903\text{s}$ 、 $t_5=1.30\text{s}$ と計算できる。

これらを元に各区間の一次関数と二次関数をまとめると、

$$\begin{aligned} 0 \leq t \leq 0.202\text{s} & \quad v = -9.8t & \quad h = 0.90 - 4.9t^2 \\ 0.202\text{s} \leq t \leq 0.503\text{s} & \quad v = 1.98 + 19.6(t - 0.202) & \quad h = 0.60 + 9.8(t - 0.303)^2 \\ 0.503\text{s} \leq t \leq 1.30\text{s} & \quad v = 3.91 - 9.8(t - 0.503) & \quad h = 1.78 - 4.9(t - 0.903)^2 \end{aligned}$$

これらの式をもとに $h-t$ グラフを書くと次ページの図5のようになる。

車飛び越えを成功させる車の速度はどれぐらいであろうか。車の屋根の最高点部分の長さが2.0m程度であり、この間重心が1.7m以上の高さにあればよいのである。重心が1.7m以上になっている時間は $1.78 - 4.9(t - 0.903)^2 > 1.70$ の不等式を解けばよい。これを解くと $0.775 < t < 1.03$ となり、その時間は0.26sである。この間に2.0m移動すればよいので、計算すると7.7m/sであり、時速に換算すると28km/hとなる。この速さ以上の車は飛び越えが可能である。この速さの時、車の先端の位置を0とした相対位置で空手家Tの重心の位置を示したのが次ページの図6である。これをみると、車の先端がTの(⑪[数値])m前方に達したとき、腰を下げ始め、(⑫[数値])m前方で足が地面から離れることになる。

G074自動車飛び越え

図5

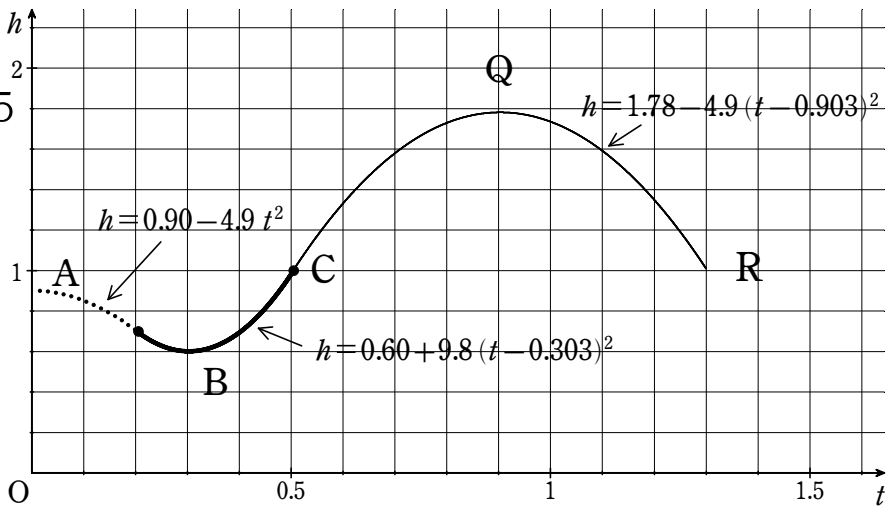
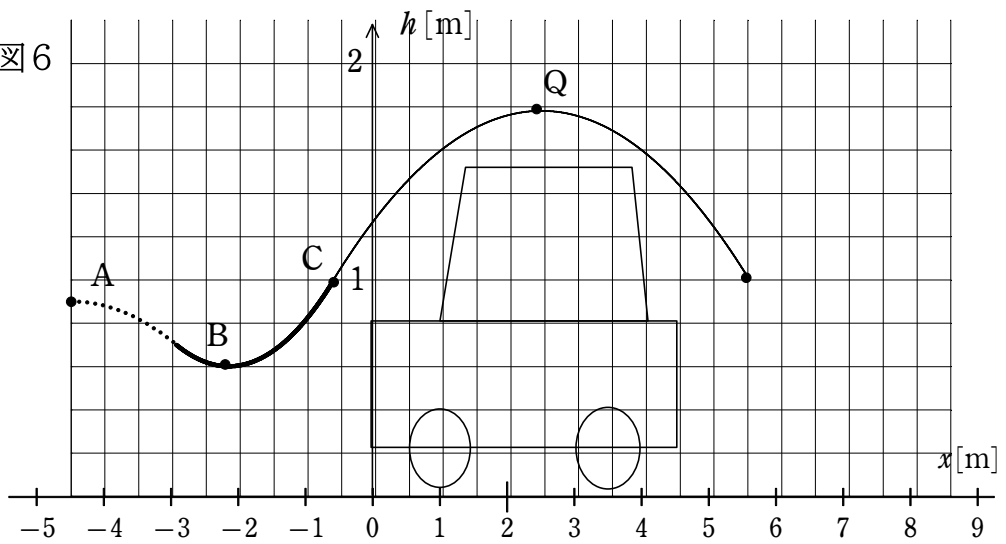


図6



G074自動車飛び越え

解説

- ① $mg(h_D - h_C)$
- ② $\frac{1}{2}mv^2$
- ③ $F(h_C - h_B)$
- ④ $-mg(h_C - h_B)$
- ⑤ 質量が $0.06m$ で、速さが u なので、運動エネルギーは $0.03mu^2$
- ⑥ 質量が $0.43m$ の場合の位置エネルギーなので、 $0.43mg(h_A - h_B)$
- ⑦ 垂直飛びの記録は $h_D - h_A = 1.78 - 0.90 = 0.88\text{m}$ よって、 88cm
- ⑧ 上向きの力が $3.0mg$ で、重力が $1.0mg$ なので、その差が合力 $2.0mg$
- ⑨ $v = v_0 + a(t - t_0)$ [ii] に $v_0 = 0$ 、 $a = -9.8$ 、 $t_0 = 0$ を代入して $-9.8 t_1$
- ⑩ $h = h_0 + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$ [iii]に $h_0 = 0.60$ 、 $a = -19.6$ 、 $t = t_1$ 、 $t_0 = t_2$ を代入して $0.60 + 9.8(t_1 - t_2)^2$
- ⑪ 図6のAの x 座標より 4.5
- ⑫ 図6のCの x 座標より 0.5