

1

斜面を下るとき、力・仕事に関する以下の文章の(①)～(⑩)の[]内に文字が記されている場合は、その文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

数学で習うまでは物理基礎で三角比を避けていましたが、三角比は物理で必要なものです。ここでは、文章を読みながら三角比を活用してください。

<力の分解>

図 1

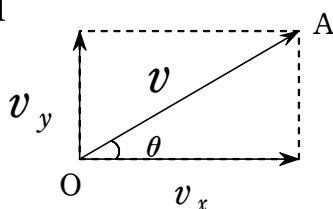


図 2

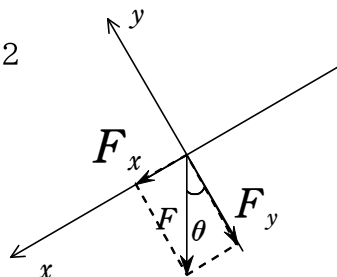


図 1 のように、物体が水平より角度 θ 方向に速度 v で動いているとき、この速度の水平成分 v_x と鉛直成分 v_y を求めることができる。 $v_x = v \cos \theta$ 、 $v_y = v \sin \theta$ である。

図 2 のように x 軸 y 軸を取り、鉛直下向きの大きさ F の力が働いているとき、この力を x 軸成分、 y 軸成分に分解することができる。 $F_x = F \sin \theta$ 、 $F_y = -F \cos \theta$ となる。軸成分を考えると符号に注意する必要がある。

これをもとにして、斜面を下る場合の力について考えてみよう。

図 3

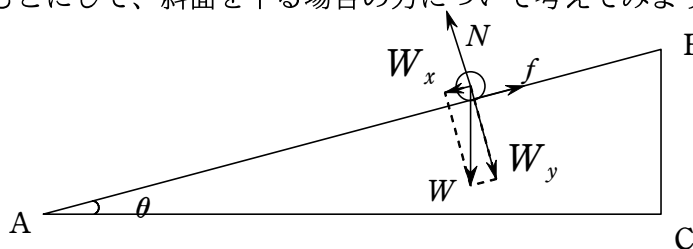


図 3 のように $\angle A = \theta$ 、 $AB = L$ の斜面がある。斜面 AB 上に質量 m の物体があるとき、重力加速度の大きさを g とすると、この物体に働く重力 W の大きさは $W = (\text{①}[m, g])$ となる。この重力を斜面方向成分の大きさ W_x と面と直角方向成分の大きさ W_y に分解するとき、 W と W_y が作る直角三角形と三角形 ABC が相似であることを利用すると、 $W_x = (\text{②}[W, \theta])$ 、 $W_y = (\text{③}[W, \theta])$ となる。面と直角方向の釣り合いより、この物体に働く垂直抗力の大きさ N は $N = (\text{④}[m, g, \theta])$ となる。物体が滑っているときの動摩擦係数を μ とすると、この物体が斜面から受ける動摩擦力の大きさ f は $f = (\text{⑤}[\mu, m, g, \theta])$ となる。

G073斜面下り

この物体が斜面方向に滑っているときの加速度の大きさを a とすると、この物体の運動方程式は

$$ma = (\textcircled{6}[W_x, f]) \quad (\text{i})$$

となり、加速度を求めることができる。計算すると、加速度は $a = g(\sin \theta - \mu \cos \theta)$ である。

次にB点で静止していた物体が斜面上を距離 x 滑った時の速さ v を仕事を用いて求めてみよう。滑った距離が x なので、重力の斜面方向成分 W_x がAB間でした仕事 w は $w = (\textcircled{7}[W_x, x])$ 、摩擦力 f がした仕事 w_f は $w_f = (\textcircled{8}[f, x])$

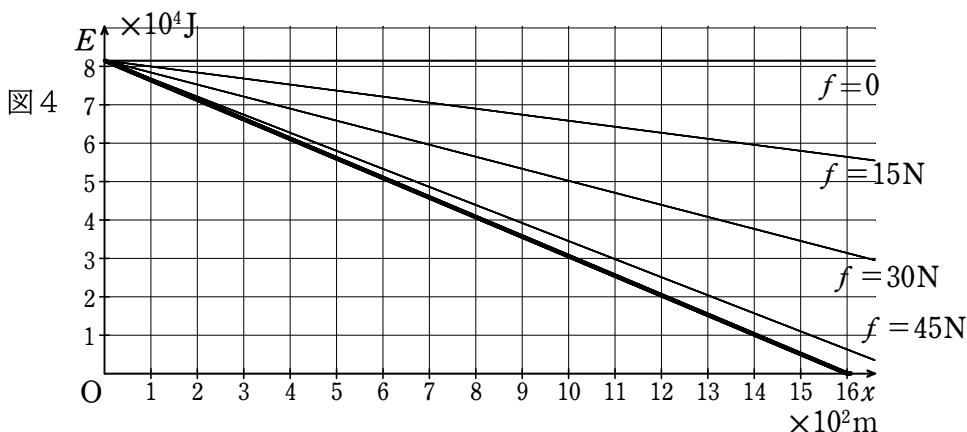
となる。A点における運動エネルギー K は $K = \frac{1}{2}mv^2$ となり、

($\textcircled{7}$) + ($\textcircled{8}$) = ($\textcircled{9}[m, v]$) の関係が成立するので、 v を求めると、 $v = \sqrt{2gx(\sin \theta - \mu \cos \theta)}$ となる。

この運動をエネルギーの観点で考えてみよう。A点を位置エネルギーの基準とすると、B点にあるときの重力による位置エネルギー U は高さBCに注目して、 $U_0 = mgL \sin \theta$ となる。 x 滑った時のAからの高さは $(L-x) \sin \theta$ となるので、この時の重力による位置エネルギー U は $U = mg(L-x) \sin \theta$ となる。

この考え方を安古市高校校門から毘沙門台入り口までの斜面で考えてみることにする。この斜面を図3の斜面と考えると $AB=1600\text{m}$ 、 $AC=104\text{m}$ となるので、 $\sin \theta = 0.0625$ となり、 $\theta = 3.7^\circ$ となる。実際は傾斜角が場所によって異なり、カーブもあるのであるが、一様な斜面で、直線路と考えることにする。

まずは空気抵抗がないものとしてB点から下った距離とエネルギーの関係をグラフにしたのが図4である。



このグラフは $m = 80\text{kg}$ 、 $g = 9.8\text{m/s}^2$ とした。この時の μ は動摩擦係数であるが、同時にブレーキの強さと考えることができる。グラフの太線は位置エネルギーを示し、グラフ内の f の値はブレーキの強さを示している。そのグラフは f の大きさのブレーキをかけながら下った時の力学的エネルギーの値を示し

G073斜面下り

ている。太線との差が運動エネルギーを示しており、 $f=0$ のグラフとの差がブレーキで失われた力学的エネルギーを示しているといえる。

下のグラフ図5は自転車の速さ（時速）と運動エネルギーの関係を示したものである。

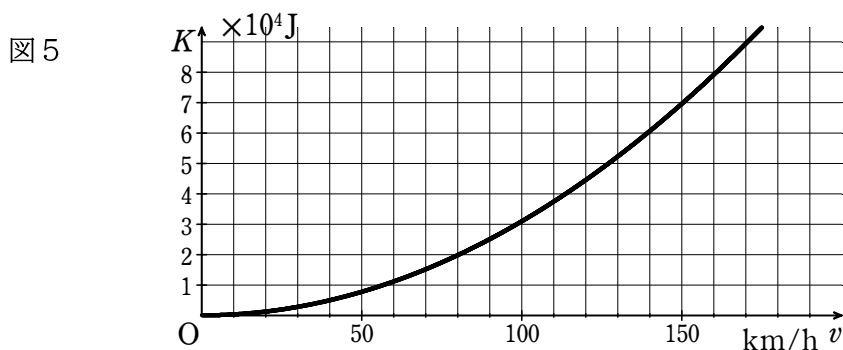


図5より空気抵抗を考えないとき、ブレーキをかけずに降りるとA点に達したときの自転車の速さは160km/hほどの速さになっていることがわかり、30Nのブレーキをかけながら降りると、(⑩[数値]) km/hとなることがわかる。

実際に自転車で斜面を下るときは、空気抵抗がある。次に空気抵抗がある場合を考えてみよう。空気抵抗 f_k は速さ v の二乗に比例するといわれている。比例定数を k として、 $f_k = kv^2$ とあらわすことができる。自転車の場合 $k=0.24\text{Ns}^2/\text{m}^2$ とされている。また、ブレーキをかけなくても路面とタイヤの摩擦力が $f_0=6.0\text{N}$ ほど働いている。この時の運動方程式は(i)を参考として

$$ma = (\text{⑪}[W_x, f, f_0, f_k]) \quad (\text{ii})$$

とあらわすことができる。

速度によって、加速度が変化するので、この運動方程式を通常の方法で解くことができない。そのため、1s間は加速度が変わらないものと仮定して、この運動方程式を1sごとに解き、その移動距離と速度を計算する方法で解を求めることにする。ある時刻の速度を v として、(ii)の運動方程式よりその時の加速度 a を求める。その次の1s間は加速度が一定と仮定しているので、等加速度直線運動と考えることができ、その加速度を用いて1s後の速度は (⑫[v, a]) となり、

この1s間の移動距離は平均速度を求めることにより $\frac{2v+a}{2}$ となる。次にこの

速度 (⑫) を用いて、次の1s間の加速度を求め、同様に次々と計算していけば、各時刻の速度と移動距離をそれぞれ求めることが可能である。このような計算方法をシュミレーション計算と呼んでおり、科学技術の計算によく使われる手法である。

10ページの図7は全くブレーキをかけずに1600m降下したときのシミュレー

G073斜面下り

ション計算結果を元にして、各位置におけるエネルギー状態をグラフにしたものである。斜めの太線がその位置の最下点（毘沙門台入り口）を基準とした位置エネルギーを示しており、下から2番目の細線が力学的エネルギーを示している。太線と細線の間が運動エネルギーを意味している。また、破線はその力学的エネルギーにタイヤと路面の摩擦による仕事を加えたものを示している。

図6によると最初に持っていた位置エネルギーは $8.1 \times 10^4 \text{ J}$ であったが、1600 m下った時、重力による位置エネルギーは0 Jであり、運動エネルギーは $0.9 \times 10^4 \text{ J}$ 、路面との摩擦による仕事で失われたエネルギーは $1.0 \times 10^4 \text{ J}$ となり、空気抵抗による摩擦で失われたエネルギーは $6.2 \times 10^4 \text{ J}$ となる。最初の位置エネルギーの大半が空気抵抗で失われていることがわかる。

最下点での運動エネルギーからブレーキをかけずに降りた時の自転車の速さを求めると $\frac{1}{2} \times 80 \times v^2 = 0.9 \times 10^4$ より、15 m/sとなる。時速に換算すると54 km/hとなり、危険な速さである。

図7のグラフを見ると位置エネルギーのグラフと力学的エネルギーのグラフはほぼ平行になっている。これは、ある程度以上の速さになると速さが一定になることを示している。よって、(ii)において $a = 0$ と置けば、最下点での速さを求めることができる。 $W_x = f + f_0 + f_k$ となり、数値的に計算すると、 $f = 43 - 0.24v^2$ となり、この式で最下点の速さとブレーキの強さの関係式を求めることができる。この式をグラフにしたのが図6である。

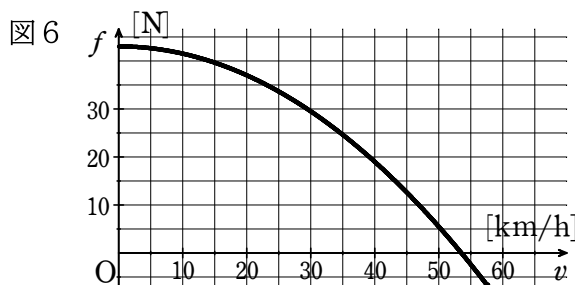
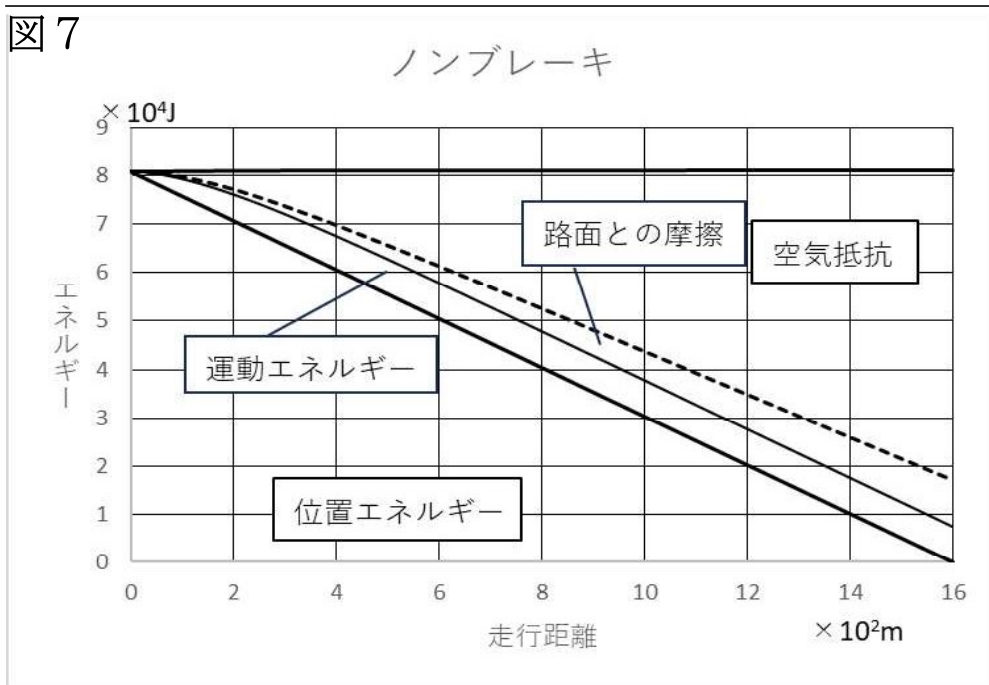


図6は速さを時速に換算したものである。図6によると最下点で安全といわれている速さ15 km/hとするためには (⑬[数値]) Nほどのブレーキ力が必要であることがわかる。ブレーキバーにはこの原理が働いているので、ブレーキレバーを握る力はその $\frac{1}{5}$ 程度であり、前後均等にブレーキをかけると片方のブレーキレバーを握る力は、さらにその $\frac{1}{2}$ となる。

図 7



G073斜面下り

解説

- ① mg
- ② $W\sin\theta$
- ③ $W\cos\theta$
- ④ $mg\cos\theta$
- ⑤ $\mu mg\cos\theta$
- ⑥ $W_x - f$
- ⑦ $W_x x$
- ⑧ $-fx$
- ⑨ $\frac{1}{2}mv^2$
- ⑩ 100
- ⑪ $W_x - f - f_0 - f_k$
- ⑫ $v + a$
- ⑬ 40