

G072卓球カットボール

1

卓球では、ボールをカットすることが多いが、カットによって、ボールがどれほど曲がるかを考えた以下の文章の(①)～(⑤)の[]に文字が示されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合当てはまる数値を入れよ。

卓球の試合ではボール・ラケットともに高速で動いているが、相対速度を用いることで問題をシンプル化して考えることにする。ラケットを水平面で静止させ、ボールを斜めに衝突させることを考える。

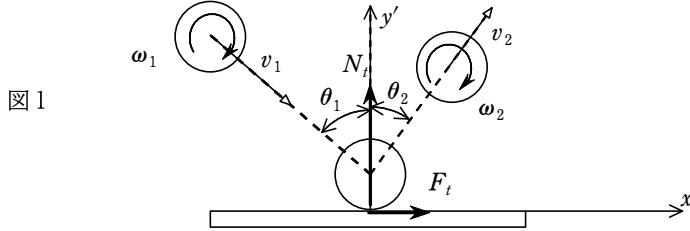


図1

ラケットとボールの接点を原点とし、ラケットの面方向に x' 軸、面に垂直方向に y' 軸を取るものとする。半径 r 、質量 m のボールが y' 軸に対して角度 θ_1 、速さ v_1 、角速度 ω_1 で侵入し、角度 θ_2 、速さ v_2 、角速度 ω_2 で飛び去ったとする。接触した瞬間のボールが受ける力積の y' 軸方向成分を N_t 、面方向成分を F_t とする。ボール（半径 $r=0.02\text{m}$ 、質量 $m=0.0027\text{kg}$ ）とラケットの接触時、ボールは滑らないものとする。角速度は時計回りを正とし、回転数 f と角速度 ω との間には $f=\frac{\omega}{2\pi}$ という関係がある。

$$\text{ボールが受ける } y' \text{ 方向の力積の式} \quad N_t = (\text{①}[m, v_2, \theta_2]) + m v_1 \cos \theta_1 \quad (\text{i-1})$$

$$\text{ボールが受ける } x' \text{ 方向の力積の式} \quad F_t = (\text{②}[m, v_2, \theta_2]) - m v_1 \sin \theta_1 \quad (\text{i-2})$$

ボールがラケット上で滑らないので、打った後のボールの周回速度(③ $[r, \omega_2]$)と x' 方向速度 $v_2 \sin \theta_2$ は一致する。 (③) $= v_2 \sin \theta_2$ (i-3)

力積のモーメント $F_t r$ がボールを回転させるので、角速度の変化は、

$$F_t r = \frac{5}{3} m r^2 (\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{i-4})$$

となることが知られている。係数 $\frac{5}{3} m r^2$ は慣性モーメントと呼ばれている物理量である。反発係数を e とすると

$$e = \frac{(\text{④}[v_2, \theta_2])}{v_1 \cos \theta_1} \quad (\text{i-5})$$

が成立する。 $e=0.7$ 程度である。これらを連立させて解くと

$$v_2 \sin \theta_2 = \frac{3}{8} v_1 \sin \theta_1 + \frac{5}{8} r \omega_1 \quad (\text{ii-1}) \quad v_2 \cos \theta_2 = e v_1 \cos \theta_1 \quad (\text{ii-2})$$

$$\omega_2 = \frac{3}{8} \frac{v_1 \sin \theta_1}{r} + \frac{5}{8} \omega_1 \quad (\text{ii-3})$$

G072卓球カットボール

$$F_t = -\frac{5}{8}mv_1\sin\theta_1 + \frac{5}{8}mr\omega_1 \quad (\text{ii-4})$$

$$N_t = (1+e)mv_1\cos\theta_1 \quad (\text{ii-5})$$

ここで、 $v_2\sin\theta_2 = v_{x'}$ 、 $v_2\cos\theta_2 = v_{y'}$ とおくと、以下の式で、 v_2 、 θ_2 が求められる。

$$v_2 = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} \quad (\text{iii-1})$$

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{x'}}{v_{y'}} \quad (\text{iii-2})$$

ラケットでボールを打つ直前の相対速度を計算してみよう。打つ前のボールの速さ v_0 (速度 $\vec{v}_0$)、ラケットの速さ V_0 (速度 $\vec{V}_0$)、ラケットに対するボールの相対速度の大きさ v_1 (速度 $\vec{v}_1$) とする。その時、 $\vec{v}_1 = (\textcircled{5}[\vec{v}_0, \vec{V}_0])$ の関係が成立する。その様子を図示したのが図 2 Aで、速度ベクトルのみを拡大したのが図 2 Bである。角度はすべて y' 軸より測り、 $\vec{V}_0$ は角度 θ の方向、 $\vec{v}_0$ は角度 α の方向とする。 $\vec{v}_1$ は角度 θ_1 の方向である。

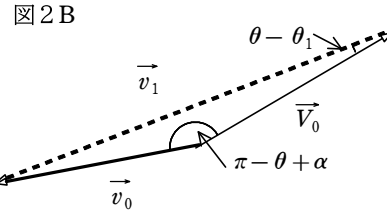
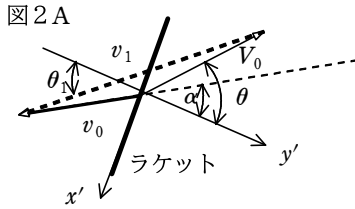


図 2 Bにおいて、以下の2式が成り立つ。

$$\text{余弦定理} \quad v_1^2 = V_0^2 + v_0^2 + 2V_0v_0\cos(\theta - \alpha) \quad (\text{iv-1})$$

$$\text{正弦定理} \quad \sin(\theta - \theta_1) = \frac{v_0}{v_1}\sin(\theta - \alpha) \quad (\text{iv-2})$$

次に、打った直後のボールの速さ v_s を求めてみよう。打った直後のボールの速度を $\vec{v}_s$ 、ボールを打つ前後でラケットの速度 $\vec{V}_0$ は変わらないものとする、ラケットの速さは V_0 であり、ラケットに対するボールの相対速度 $\vec{v}_2$ の大きさを v_2 とする。相対速度の式より $\vec{v}_s = (\textcircled{6}[\vec{v}_2, \vec{V}_0])$ が成立する。この様子を図示したのが図 3 Aであり、速度ベクトルを拡大したのが図 3 Bである。打つ前と同様にすべての角度は y' 軸から測るものとする。 $\vec{v}_s$ の方向を角度 β とする。 $\vec{v}_2$ の方向は角度 θ_2 であり、 $\vec{V}_0$ は角度 θ である。

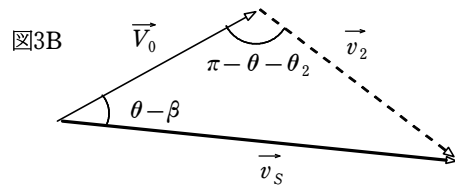
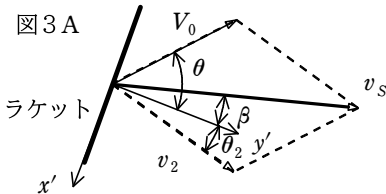


図 3 Bにおいて、次の2式が成り立つ。

$$\text{余弦定理より} \quad v_s^2 = V_0^2 + v_2^2 + 2V_0v_2\cos(\theta + \theta_2) \quad (\text{v-1})$$

$$\text{正弦定理より} \quad \sin(\theta - \beta) = \frac{v_2}{v_s}\sin(\theta + \theta_2) \quad (\text{v-2})$$

G072卓球カットボール

総合的に考えるために、ラケットとボールの接点を原点とし、相手コートの方を x 軸、鉛直方向を y 軸とする。ラケットで打つ前後の速度を示したのが図4である。

図4

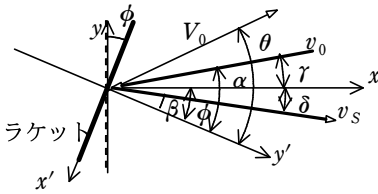
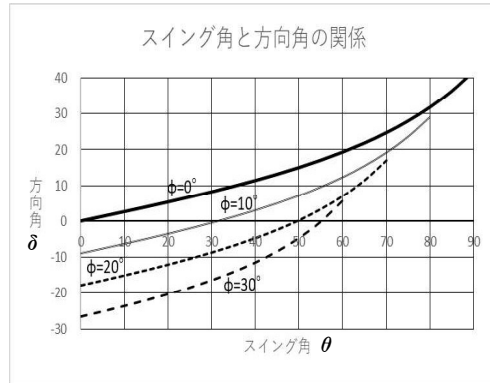


図5



ラケットを y 軸より角度 ϕ 傾けて、 y' 軸より角度 α 方向（ x 軸方向より角度 γ ）より速さ v_0 、角速度 ω_0 で飛んできたボールを、ラケットを角度 θ 方向に速さ V_0 でスイングすることにより、角度 β 方向に速さ v_s で打ち返す。この時の β 、 v_s の計算方法を考える。

- (1) $\alpha, v_0, \theta, V_0, \omega_1$ を用いて、(iv-1)により v_1 、(iv-2)で θ_1 を求める。
- (2) (ii-1)～(ii-3)、(iii-1)、(iii-2)に v_1, θ_1, ω_1 を代入することにより、 v_2, θ_2, ω_2 を求める。
- (3) v_2, θ_2 を用いて、(v-1)により v_s 、(v-2)式で β が求められる。

ボールの実際に飛んで来る方向角 γ を用いると $\alpha = \gamma + \phi$ 、ボールが飛んでいく方向角 δ は $\delta = (\textcircled{7}[\phi, \beta])$ で表される。

$\gamma = 0$ の方向から飛んできた 無回転の $v_0 = 30\text{m/s}$ のボールを、ラケットを ϕ 傾けてスイング角 θ の方向に $V_0 = 30\text{m/s}$ の速さでラケットを振る。 $\phi = 0^\circ, 10^\circ, 20^\circ, 30^\circ$ の各場合に θ を色々を変えた時の打った後の飛んでいく方向 δ を計算してみると、図5のようになった。

卓球の試合では打ち返した後のボールが飛んできた方向と大きくずれると相手コートに入らない。そこで、以降、 $\gamma = 0$ の方向から飛んできた $v_0 = 30\text{m/s}$ の速さのボールを $V_0 = 30\text{m/s}$ の速さでラケットを振り $\delta = 0$ の方向（ $\gamma = 0$ の方向）に打ち返す場合を考える。

図5を見ると、飛んできたボールが無回転の場合、ボールがラケットの傾き $\phi = 10^\circ$ のとき、スイング角 $\theta = 30^\circ$ の方向にラケットを振るとボールが返せることを示している。

ボールが回転している場合を考えるため、無回転ボールと回転数 100Hz のボールと回転数 -100Hz のボールを打ち返すときのラケットの傾き ϕ とスイング角 θ の関係を最終ページの図6 Aに示した。

打ち返されたボールは $\theta = 0$ の時が最も速いと考えられるので、 -100Hz で回転しているボールをなるべく速い球で打ち返すには、図6 Aより、ラケットを $\phi = (\textcircled{8}[\text{数値}])^\circ$ 傾けて打ち返せばよいことがわかる。

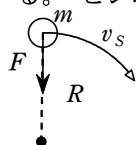
ボールが無回転の場合のラケットの傾き ϕ の状態でボールが来た方向に打ち返した場合のボールの速さ v_s 、回転数 f_2 を示したのが図6 Bである。図6 Bを見ると、ラケットを $\phi = 10^\circ$ の場合、図6 Aより、スイング角 $\theta = 30^\circ$ であり、打った後のボールの速さは $(\textcircled{9}[\text{数値}])\text{m/s}$ であり、回転数は $(\textcircled{10}[\text{数値}])\text{Hz}$ となることがわかる。これを「事例1」とする。

G072卓球カットボール

このように卓球の場合は球の回転を考えて打ち返さなければならず、相手のラケットの動きをよく見ていなければならない。

この結果を用いてラケットで打った後のボールがどれだけ曲がるかを考えることにする。 ω_2 によって、進行方向に対して直角方向にマグナス力と呼ばれている力が働く、ボールが等速円運動していると仮定して、その回転半径 R を求める式を立ててみよう。この様子を示したのが図7である。マグナス力の大きさ F は比例定数を k とすると、 $F = k v_s \omega_2$ であることが知られている。ピンポン玉では $k = 9.95 \times 10^{-5} \text{ kg/rad}$ 程度とされている。

図7



速さ v_s で、マグナス力の大きさが F 、ボールの回転半径 R とすると、向心加速度の大きさは $(\text{⑪}[v_s, R])$ となるので、運動方程式は $m \times (\text{⑪}) = (\text{⑫}[k, v_s, \omega_2])$ 。これを解く

$$\text{と、} R = \frac{m v_s}{k \omega_2} \text{ となる。これは、数値的に } R = 27.1 \frac{v_s}{\omega_2} [\text{m}] \quad (\text{vi})$$

で計算できる。この回転半径 R を図6Bに示した。回転半径が小さいほどボールは鋭く曲がることを意味している。図6Bを見ると、ラケットの傾きを大きくすればするほどボールは遅くなり、ボールの回転数が上がる。その結果、回転半径が小さくなる事が分かる。

ボールが飛んでいくと空気抵抗により、ボールが遅くなる。回転数も低下するがごくわずか(0.1sで2%ほどの減少)なので、短時間であれば一定の回転数と考えても差支えない。高度な計算によると x 移動した後のボールの速さ v は $v = 0.884^x v_s$ と求められる。これをもとに、 $v_s = 70, 60, 50, 40, 30 \text{ m/s}$ の各場合の x と t の関係を求め、図8に示した。また、打った直後の速さを1としたときの速さ w を x ごとに求めてみたところ、図9のようになった。(vi)により、回転半径は v に比例することが分かるので、打った直後の回転半径を1としたときの x における回転半径は $(\text{⑬}[w])$ となる。図9をみると、相手コートに飛んでいくボールは急激にブレーキがかかると同時に大きく曲がる事が分かる。

図8

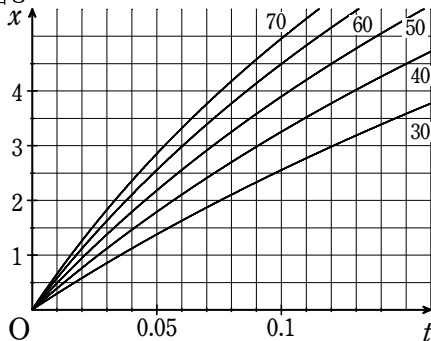
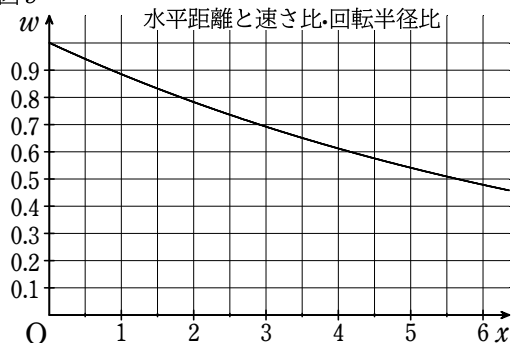


図9



事例1の場合、ボールの回転半径は22m程度であるが、相手コートに入る $x=4\text{m}$ 先に達するのは $(\text{⑭}[\text{数値}])$ s 後で、図9より $w=0.6$ 倍となるので、ボールの速さは $(\text{⑮}[\text{数値}])$ m/s、回転半径は13m程になっていることが分かる。

図 6 A

回転数とスイング角の関係

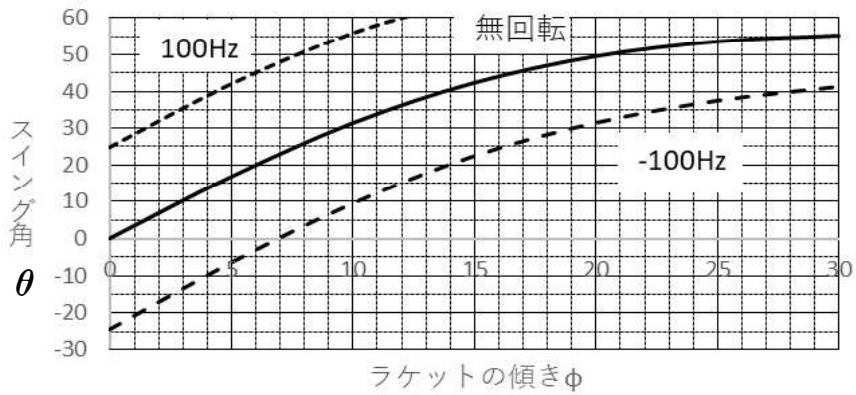
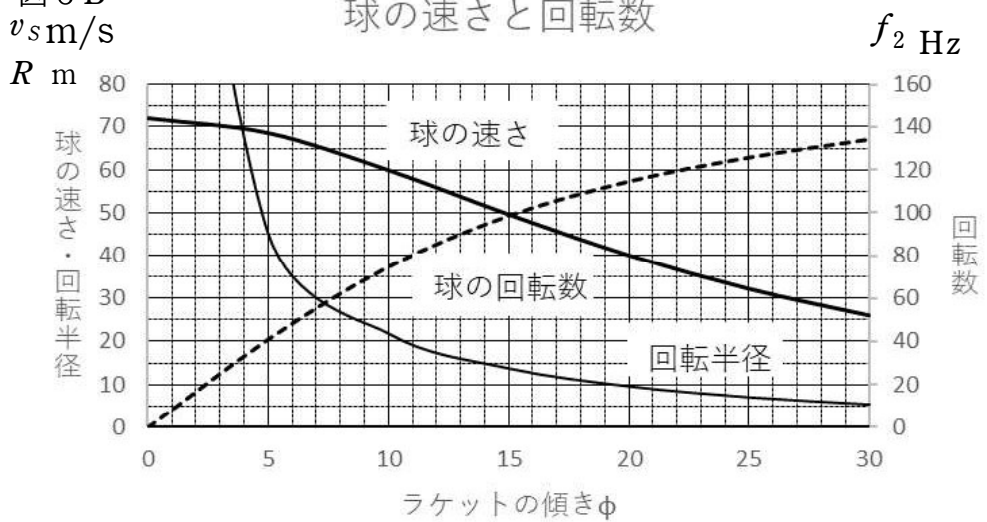


図 6 B
 v_s m/s
 R m

球の速さと回転数



G072卓球カットボール

解説

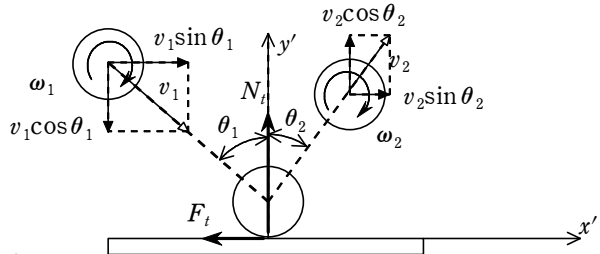
- ① 力積は運動量の差である。ボールが受ける y' 方向の力積の式は

$$N_t = \text{衝突後の } y' \text{ 方向の運動量} - \text{衝突前の } y' \text{ 方向の運動量}$$

である。衝突後の y' 方向速度は $v_2 \cos \theta_2$ なので、

$$N_t = mv_2 \cos \theta_2 + mv_1 \cos \theta_1$$

となる。よって、 $mv_2 \cos \theta_2$



- ② ボールが受ける x' 方向の力積の式は

$$-F_t = \text{衝突後の } x' \text{ 方向の運動量} - \text{衝突前の } x' \text{ 方向の運動量}$$

衝突後の x' 方向速度は $v_2 \sin \theta_2$ なので、

$$-F_t = mv_2 \sin \theta_2 - mv_1 \sin \theta_1$$

となる。よって、 $mv_2 \sin \theta_2$

- ③ ボールの周回速度は $r\omega_2$

- ④ 反発係数は面と直角方向の速さに関して衝突前の速さに対する衝突後の速さの比である。④は分子なので、衝突後の面と直角方向の速さとなる。よって、 $v_2 \cos \theta_2$

- ⑤ 図2Bより $\vec{v}_0 = \vec{V}_0 + \vec{v}_1$

図2B

$$\text{変形すると } \vec{v}_1 = \vec{v}_0 - \vec{V}_0$$

- ⑥ 図3Bより $\vec{v}_s = \vec{v}_2 + \vec{V}_0$

- ⑦ 図4より、 δ は x 軸と v_s のなす角

ϕ は x 軸と y' 軸とのなす角、 β は y' 軸と v_s

のなす角なので、 $\delta = \phi - \beta$

- ⑧ なるべく速い球を打ち返すにはスイング角0度が理想である。図6Aで-100Hzのグラフ中でスイング角0度となっているラケットの傾き角 ϕ を読めばよい

$$\phi = 7.0^\circ$$

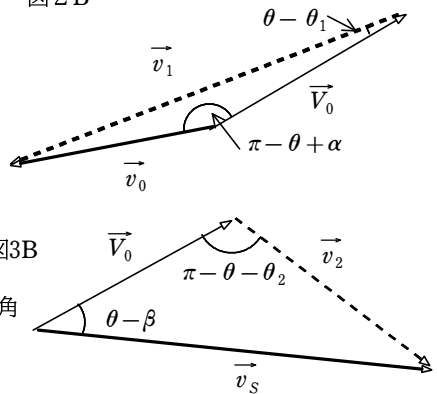


図3B

- ⑨ 図6Bの傾き角10度のボールの速さのグラフを見ると 60m/s

- ⑩ 図6Bの傾き角10度のボールの回転数のグラフを見ると 75Hz

- ⑪ 向心加速度なので、 $\frac{v_s^2}{R}$

- ⑫ 向心力はマグナス力である $F = kv_s \omega_2$

と書いてあるので、 $kv_s \omega_2$

- ⑬ 速さと回転半径が比例しているので、 $x=0$ の時の速さがラケット w の時は回転半径も w

- ⑭ 図8の $v=60$ のラインで、 $x=4$ となっている時刻を読み取ると $t=0.086$

- ⑮ 速さが0.6倍になっているので、 $60\text{m/s} \times 0.6 = 36\text{m/s}$

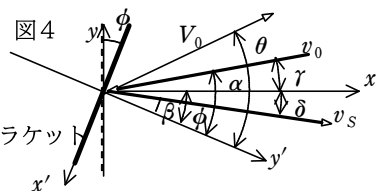


図4

G072卓球カットボール

(i)→(ii)への計算

$$N_t = mv_2 \cos \theta_2 + mv_1 \cos \theta_1 \quad (\text{i-1})$$

$$F_t = mv_2 \sin \theta_2 - mv_1 \sin \theta_1 \quad (\text{i-2})$$

$$r\omega_2 = v_2 \sin \theta_2 \quad (\text{i-3})$$

$$F_t r = -\frac{5}{3} m r^2 (\omega_2 - \omega_1) \quad (\text{i-4})$$

$$e = \frac{v_2 \cos \theta_2}{v_1 \cos \theta_1} \quad (\text{i-5})$$

(i-4)に(i-2)を代入する

$$F_t = mv_2 \sin \theta_2 - mv_1 \sin \theta_1 \text{ を代入すると } -mv_2 \sin \theta_2 + mv_1 \sin \theta_1 = \frac{5}{3} m r (\omega_2 - \omega_1)$$

(i-3)を用いて ω_2 を消去すると、

$$-mv_2 \sin \theta_2 + mv_1 \sin \theta_1 = \frac{5}{3} m (v_2 \sin \theta_2 - r\omega_1)$$

これを $v_2 \sin \theta_2$ について解くと

$$v_2 \sin \theta_2 = \frac{3}{8} v_1 \sin \theta_1 + \frac{5}{8} r\omega_1 \quad (\text{ii-1})$$

$$(\text{i-5}) \text{ より } v_2 \cos \theta_2 = e v_1 \cos \theta_1 \quad (\text{ii-2})$$

$$(\text{i-3}) \text{ より } \omega_2 = \frac{1}{r} v_2 \sin \theta_2$$

$$(\text{ii-1}) \text{ を代入して } \omega_2 = \frac{1}{r} v_2 \sin \theta_2 = \frac{3}{8} \frac{v_1 \sin \theta_1}{r} + \frac{5}{8} \omega_1 \quad (\text{ii-3})$$

$F_t = mv_2 \sin \theta_2 - mv_1 \sin \theta_1$ に(ii-1)を代入すると

$$F_t = -\frac{5}{8} m v_1 \sin \theta_1 + \frac{5}{8} m r \omega_1 \quad (\text{ii-4})$$

(i-1)に(ii-2)を代入すると

$$N_t = (1 + e) m v_1 \cos \theta_1 \quad (\text{ii-5})$$

$$\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2 = 1 \text{ なので、 } v_2^2 \sin^2 \theta_2 + v_2^2 \cos^2 \theta_2 = v_2^2$$

$$v_2 \sin \theta_2 = v_{x'}, \quad v_2 \cos \theta_2 = v_{y'} \text{ とおくと、 } v_2^2 = v_{x'}^2 + v_{y'}^2$$

$$\text{よって、 } v_2 = \sqrt{v_{x'}^2 + v_{y'}^2} \quad (\text{iii-1})$$

$$\tan \theta_2 = \frac{v_2 \sin \theta_2}{v_2 \cos \theta_2} = \frac{v_{x'}}{v_{y'}} \quad (\text{iii-2})$$

高校では習わないが逆三角関数というもの存在し、それを用いると、

$$\theta_2 = \arctan\left(\frac{v_{x'}}{v_{y'}}\right)$$

と置くこともできる。