

G071自転車はなぜ倒れないか

1

自転車が倒れない理由について論じた、次の文章の(①)～(⑩)の[]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

自転車はなぜ倒れずに走れるかを考えてみよう。

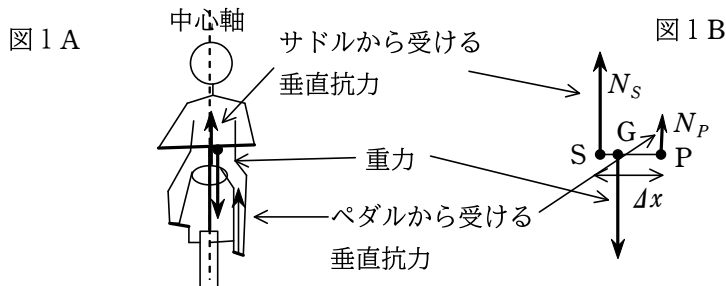
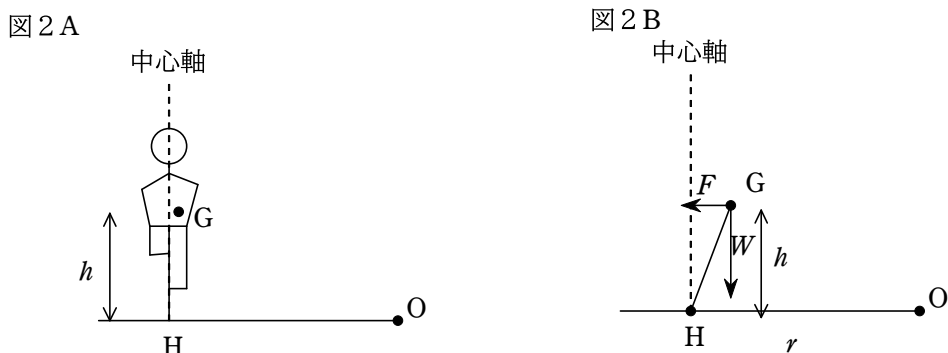


図1 Aのように自転車に人が自転車の中心軸上にあるサドルSの上に載っていて、人体の中心軸と自転車の中心軸は一致しているものとする。人体はサドルSから中心軸に沿って大きさ N_S の垂直抗力を受ける。この人が左側のペダルを踏みこんでいる場合を考えてみる。左ペダルから大きさ N_P の垂直抗力を受けており、右ペダルから力を受けていないものとする。この場合人体の重心Gの位置は若干左側ペダルのほうにずれていることになる。この状態の力の位置関係を示したのが図1 Bである。人体の質量を m 、重力加速度の大きさを g とすると、人体に働いている重力の大きさ W は $W = (①[m, g])$ である。左ペダルから k を定数として $N_P = kmg$ の垂直抗力を受けている場合、 $N_S = (②[k, m, g])$ となる。自転車の中心軸とペダルの位置との距離 $SP = \Delta x$ とすると、 $SG = (③[\Delta x])$ となる。通常 $k = 0.3$ 、 $\Delta x = 0.1\text{m}$ 程度である。以降簡単のために自転車自体の質量は無視できるものとして考える。



路面と車輪との接点をH、自転車と人の共通重心をGとし、Gの高さを h とする。今自転車は一定の速さ v で走っているとすると、この状態を示したのが図2 Aである。人体の重心の位置が中心軸より (③) ずれているとして、走行中の自転車の安定性について考えてみよう。図2 Bはそれを模式的に表示したものである。

この状態を真上から示したのが図3である。Oを回転中心とする円弧ABを描く等速円運動をすることになる。その回転半径を r とすると、遠心力 $F = (④[m, r, v])$ が図2 Bの

G071自転車はなぜ倒れないか

左側にはたらくことになる。H点を回転中心とすると、遠心力による力のモーメントの大きさは (⑤ $[m, r, v, h]$) となる。

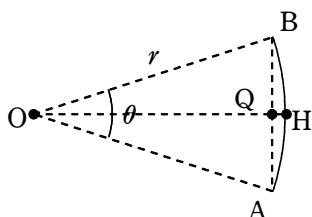


図 3

(真上から見た自転車の運動)

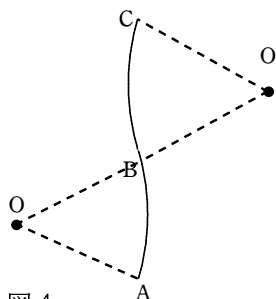


図 4

(真上から見た自転車の運動)

大きさ mg の重力が下向きにはたらいており、点Hを回転中心とすると、重力による力のモーメントの大きさは (⑥ $[m, g, k, \Delta x]$) となる。両モーメントはつり合い関係にあるのでモーメントのつり合いの式

$$(⑤) = (⑥) \quad (i)$$

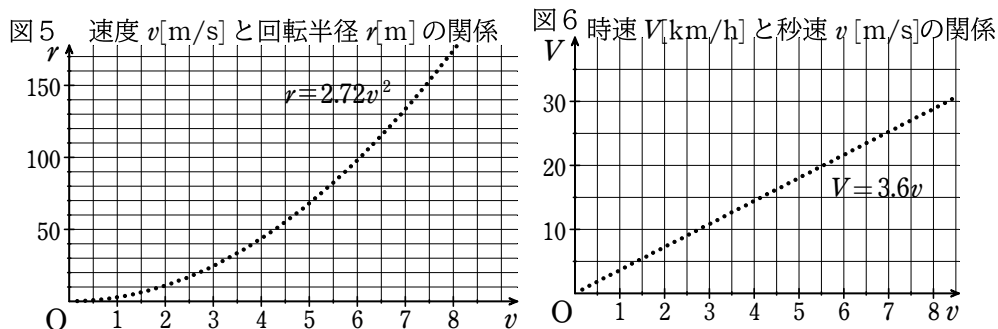
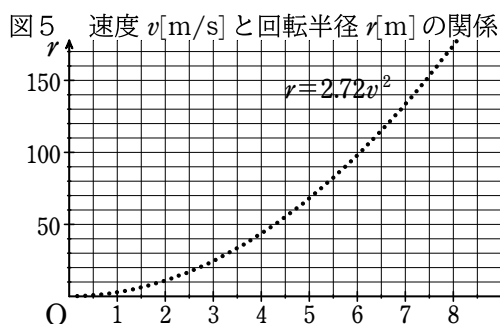
が成り立つ。これにより回転半径 r は

$$r = \frac{v^2 h}{g k \Delta x} \quad (ii)$$

で表される。ここで、数値を

$$g = 9.8 \text{ m/s}^2, k = 0.30, \Delta x = 0.10 \text{ m}, h = 0.80 \text{ m} \quad (iii)$$

とすると、 $r = 2.72v^2$ となる。これをグラフにしたのが図5で、時速 $V[\text{km/h}]$ と秒速 $v[\text{m/s}]$ の関係を示したのが図6である。



(ii)よりAB間では Δx が小さく v が大きいほど回転半径の大きい等速円運動をすることがわかる。20km/hで走っているときの回転半径は (⑦[数値]) mほどとなることがわかる。この状態のままだと、同じところを回ることになるので、図4のようにAを通過後、時間 Δt 後にBに達した瞬間、重心を中心線より左側(逆側)に瞬間的に Δx 移動させるとO'に回転中心を持つ同じ回転半径の等速円運動BCをすることになる。

図4より、AB間ではOに回転中心がある等速円運動でBC間ではO'に回転中心がある等速円運動であることがわかる。自転車の乗っている人はこの重心移動をペダルの回転に

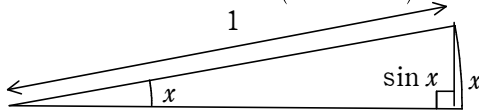
G071自転車はなぜ倒れないか

合わせて行うことによりジグザグ運転しながら前進しているのである。

次に、ジグザグ運転による左右のブレがどの程度になるかを計算してみよう。

図3において、今自転車がAからBへ半径 r の円弧を描きながら等速円運動をしているとする。弧ABの中心角 $\angle AOB = \theta$ とする。Oから弦ABに垂線を引きその交点をQとし、その延長線と弧ABとの交点をHとする。自転車の左右のブレ s はこの図ではQHとなる。

$$s = OH - OQ = r - r \cos \frac{\theta}{2} = r \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) = 2r \sin^2 \frac{\theta}{4} \quad (2倍角の公式)$$



半径1の扇形と斜辺1の直角三角形を重ねるとわかるが、 $x \cong 0$ の時、 $\sin x \cong x$ と考えて差し支えないので、 $\sin \frac{\theta}{4} = \frac{\theta}{4}$ と置き換えてよい。

$$s = \frac{r\theta^2}{8} \quad (iv)$$

自転車のギア比（ペダルのあるギアの歯数/後輪ギアの歯数）を n 、車輪の半径を R とすると、ペダル半回転で弧ABを走るとすれば、走る距離は $\pi R n$ であらわされる。通常のママチャリで $n = 2.0$ 程度、 $R = 0.35\text{m}$ 程度である。 n が大きいほど重いが速く走れる。ペダルを半回転させる時間を Δt とすると、通常の街乗りで $\Delta t = 0.50\text{s}$ 程度である。ここで、数値を次のように定義する。

$$n = 2.0, R = 0.35\text{m}, \Delta t = 0.50\text{s} \quad (v)$$

自転車の速さ v は

$$v = (\otimes[R, n, \Delta t]) \quad (vi)$$

となる。次に自転車で走っているときの左右のブレを計算してみよう。 $\triangle OAB$ で、弧 $AB = \pi R n$ 、 $OA = OB = r$ となるので、 $\theta = \frac{\pi R n}{r}$ と置ける。(iii)に代入すると、

$$s = \frac{(\pi R n)^2}{8r} \text{ となる。}$$

$$(ii) \text{に} (vi) \text{を代入すると、} r = \frac{v^2 h}{g k \Delta x} = \frac{h}{g k \Delta x} \left(\frac{\pi R n}{\Delta t} \right)^2 \text{ なので、}$$

$$s = \frac{(\pi R n)^2}{8} \frac{g k \Delta x}{h} \left(\frac{\Delta t}{\pi R n} \right)^2 = \frac{g k \Delta x}{8 h} \Delta t^2$$

(iii)、(v)の数値を代入すると、 $s = 0.011\text{m}$ となり、ほぼ直進していると考えてよい。

ギア比をそのまま、速度を落とすとバランスを取りにくくなる。次に速度を落とした場合を考えてみよう。(vi)より、 $\Delta t = \frac{\pi R n}{v}$ なので、

$$s = \frac{g k \Delta x}{8 h} \left(\frac{\pi R n}{v} \right)^2 \text{ となり、数値を代入すると } s = \frac{0.055}{v^2} n^2$$

$n = 2$ の場合 $s = \frac{0.22}{v^2}$ であり、変速して軽いギア（ $n = 1$ ）を選択した場合 $s = \frac{0.055}{v^2}$ とな

G071自転車はなぜ倒れないか

る。これをグラフにしたのが図7である。

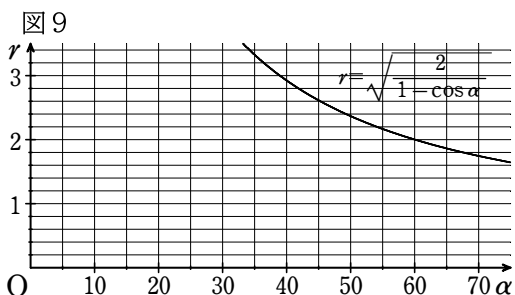
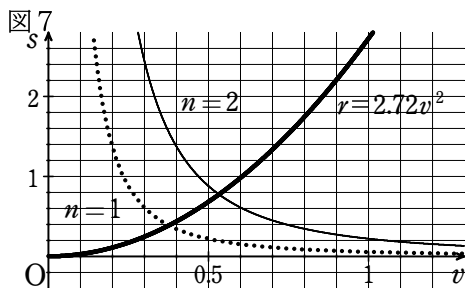


図7より 軽いギア（ $n=1$ ）の方がブレが小さくなり、バランスがとりやすくなること
がわかる。

<ハンドルの角度>

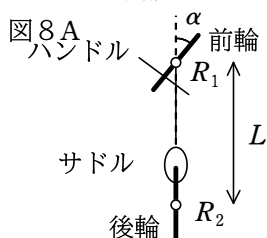
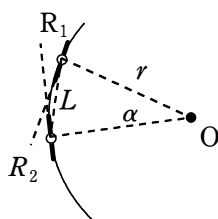


図8B



前輪と路面の接点を R_1 、後輪と路面の接点を R_2 とする R_1R_2 の距離を L とする。この L をホイールベースという。図8Aは自転車がハンドルを角度 α だけ切った状態を示している。これが、円周上を走っている状態を示したのが図8Bである。前輪と後輪の傾き角がハンドルの角度 α となり、 $\angle R_1OR_2$ と等しい。図8AとBは矛盾しているように見えるが、車体を傾けるので同じと考えて差し支えない。

$\triangle R_1OR_2$ における余弦定理より $\cos \alpha = \frac{2r^2 - L^2}{2r^2}$ となる。通常の自転車では $L = 1.0$

mなので、 $r = \sqrt{\frac{2}{1 - \cos \alpha}}$ となる。この式のグラフを書くと図9のようになる。

自転車を1.0m/sの速さで走らせる場合、回転半径が（⑨[数値]）mの円周を回ると同じになり、ハンドルを切る角度 α が（⑩[数値]）°必要であり、前に進むためにはハンドルをすぐに大きく切り返さなければならず、バランスを保つのが難しいといえる。

G071自転車はなぜ倒れないか

解説

① 重力なので、 mg

② $W = N_P + N_S$ において、 $W = mg$ 、 $N_P = kmg$

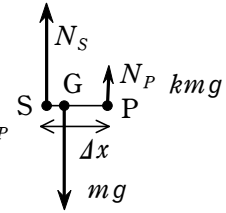
なので、 $N_S = (1 - k)mg$

③ Gはモーメントの釣り合いの位置なので、 $SG \times N_S = GP \times N_P$

が成立している。 $SG \times (1 - k)mg = GP \times kmg$

これは $(1 - k)SG = kGP \rightarrow SG = k \times (SG + GP)$

$SG + GP = \Delta x$ なので、 $SG = k\Delta x$



④ 向心加速度の大きさが $\frac{v^2}{r}$ であり、遠心力は慣性力なので、逆向きの質量との積とな

る。 よって、 $\frac{mv^2}{r}$

⑤ 遠心力のモーメントなので、 $\frac{mv^2}{r} \times h = \frac{mv^2}{r} h$

⑥ 重心はサドルの位置より $k\Delta x$ ずれているので、力のモーメントは $mgk\Delta x$

⑦ 図6で20km/hの時の秒速を求めると5.5m/s 図5で5.5m/sの時の回転半径は80mとなっている。

⑧ 走る距離は πRn なので、 Δt で移動するときの速さは $\frac{\pi Rn}{\Delta t}$

⑨ 図7の1.0m/sの回転半径は2.6mとなる。

⑩ 図8より、回転半径2.6mの時のハンドル角は45°となる。