

G070野球ホームラン

1

野球におけるホームランに関する以下の文章の(①)～(⑮)内の[]に文字が示されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

野球で投手が投げたボールをバットで打つとき、図1 A～Cのようにバットの振り方に3種類がある。

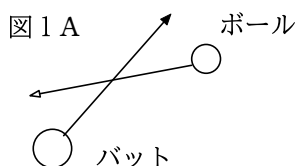


図1 A アップースイング

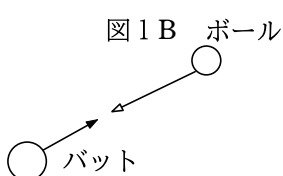


図1 B レベルスイング

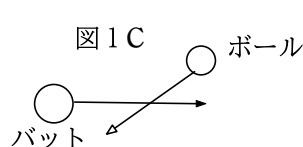


図1 C ダウンスイング

このうちアップースイングとダウンスイングはバットの軌道とボールの軌道が1点で交わっているために、タイミングが少しでもずれると空振りとなる。これに対してレベルスイングはタイミングが少しずれてもバットはボールに当たるので、ホームランを打つ確率が高くなる。よって、ここではレベルスイングについて考えることにする。

ホームランを打つ時の初速度に関して考えてみよう。ピッチャーの投げた質量 m 、半径 r のボールが v_0 の速さで、時計回りに角速度 ω_0 で回転しながら角度 θ 方向に降下しながら飛んできた。バッターはそのボールの軌道に合わせて、角度 θ で上昇するように速さ V_0 で質量 M のバットを振った。インパクトの瞬間ボールはバットの進行方向より α の角度の位置に当たり、バットの進行方向より ϕ の方向に速さ v_s 、反時計回りに角速度 ω で回転しながら飛んでいったとする。インパクトの瞬間のバットの重心位置を原点とし、水平前方方向に x 軸を取り、鉛直上方に y 軸を取る。この状態を示したのが図2である。

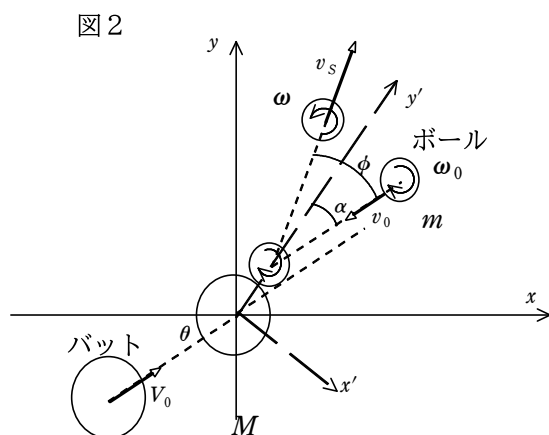


図2

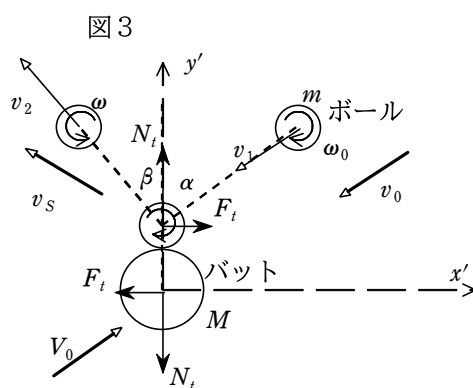


図3

これを直接計算すると複雑なので、原点からボールとバットの接触点の方向に y' 軸を取り、ボールとバットの接触面の接線方向を x' 軸を取って考えることにする。

問題を簡単にするためにバットの重心位置を基準とした相対速度で考えることにすると、インパクト直前のバットから見たボールの相対速度の大きさ v_1 は $v_1 = \textcircled{1}[v_0, V_0]$ となる。

G070野球ホームラン

x' y' 軸を基準としたバット基準の相対速度を表したのが図3である。打撃後のボールは y' 軸より β の方向に相対速度の大きさ v_2 で飛んでいったとする。このインパクトの瞬間ボールは y' 軸方向に大きさ N_t の力積を受け、ボールはバット表面で滑らなかったとする。ボールは打撃の瞬間 x' 軸方向に大きさ F_t の力積を受けてボールの回転角速度が ω_0 から逆回りに ω になったとする。

バットがボールに与える力積について考えてみると、ボールはバットの重心ではなくスイートスポットと呼ばれている点にぶつかる。重心にぶつからない場合バットが回転を始めるので重心にぶつかるよりは力積が小さくなる。さらにバットでボールを打つとき打者がバットをしっかりと握っている所以その握りがボールに力積を加える。実際は打撃後バットが回転しないので、この両者の力積はほぼ打ち消しあうと考えられる。よって、バットの質量 $M=0.85\text{kg}$ とし、重心にボールが当たったとして計算して差し支えない。力積は運動量の変化と等しいので、以下の式が成り立つ。

$$x' \text{ 軸方向のボールが受ける力積の式} \quad F_t = (2[m, v_2, \beta]) - mv_1 \sin \alpha \quad (\text{i-1})$$

$$y' \text{ 軸方向のボールが受ける力積の式} \quad N_t = (3[m, v_2, \beta]) + mv_1 \cos \alpha \quad (\text{i-2})$$

$$y' \text{ 軸方向のバットが受ける力積の式} \quad N_t = (4[M, V_2]) \quad (\text{i-3})$$

バットの表面でボールが滑らないので、ボールの表面はバットに対して静止していると考えられる。よって、ボール表面の周回速度とボールの水平方向の速度は一致する。

$$(5[r, \omega]) = v_2 \sin \beta \quad (\text{i-4})$$

高度な計算によると力積のモーメント $F_t r$ とボールの角速度の変化の間には次のような関係があることが分かっている。この時の $\frac{7}{5}mr^2$ は慣性モーメントと呼ばれる物理量で

$$\text{ある。} \quad F_t r = \frac{7}{5}mr^2(\omega + \omega_0) \quad (\text{i-5})$$

バットとボールの反発係数を e とすると、相対速度比より、成り立つ式は

$$e = \frac{v_2 \cos \beta + V_2}{(6[v_1, \alpha])} \quad (\text{i-6})$$

これら6つの方程式を連立させて解くと、

$$v_2 \sin \beta = -\frac{7}{12}r\omega_0 + \frac{5}{12}v_1 \sin \alpha \quad (\text{ii-1}), \quad v_2 \cos \beta = \frac{eM-m}{M+m}v_1 \cos \alpha \quad (\text{ii-2})$$

$$V_2 = \frac{(1+e)m}{M+m}v_1 \cos \alpha \quad (\text{ii-3}), \quad \omega = -\frac{7}{12}\omega_0 + \frac{5}{12r}v_1 \sin \alpha \quad (\text{ii-4})$$

$$N_t = \frac{(1+e)mM}{M+m}v_1 \cos \alpha \quad (\text{ii-5}), \quad F_t = \frac{7}{12}mv_1 \sin \alpha + \frac{7}{12}mr\omega_0 \quad (\text{ii-6})$$

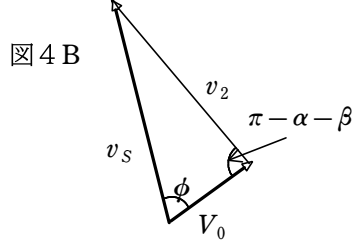
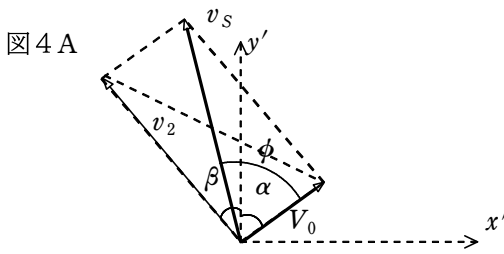
となる。ここで、 $v_2 \sin \beta = v_A$ 、 $v_2 \cos \beta = v_B$ とおくと、

$$v_2 = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} \quad (\text{iii-1}) \quad \tan \beta = \frac{v_A}{v_B} \quad (\text{iii-2})$$

と置ける。この式を用いると打撃後のバットに対するボールの相対速度 v_2 、 y' 軸に対する角度 β を求めることができる。ここで $m=0.14\text{kg}$ 、 $e=0.40$ 、 $r=0.035\text{m}$ とする。

次にバットの速度 V_0 を用いて、 v_2 、 β から、打撃後のボールの速さ v_s および飛んでい

く方向 ϕ を求める方法を考えてみよう。図4 Aはそれぞれの速度の位置関係を示しており、速度の作る三角形を示したのが図4 Bである。



v_2, V_0, v_s の作る三角形に関して、

$$\text{余弦定理より} \quad v_s = \sqrt{v_2^2 + V_0^2 - 2v_2V_0\cos(\pi - \alpha - \beta)} \quad (\text{iv-1})$$

$$\text{正弦定理より} \quad \sin \phi = \frac{v_2}{v_s} \sin(\pi - \alpha - \beta) \quad (\text{iv-2})$$

が成り立つ。図1より、インパクト直後のボールは初速度は水平（ x 軸方向）より（⑦ $[\phi, \theta]$ ）上方向に速さ v_s 、ボールの回転角速度 ω で飛んでいくことになる。打撃後のボールの初速度の大きさが v_s で、上昇角が（⑦）となる。

<軌道計算>

初速度の大きさ v_s で上昇角（⑦）で打ち上げたボールの飛距離を空気抵抗を考慮して計算してみよう。バットとボールの接触点を原点とし、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸を取る。インパクトの瞬間の時刻を0とし、原点からの変位ベクトル $\vec{x} = (x, y)$ 。時刻 t におけるボールの速さ v の速度ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y)$ とし、の加速度ベクトル $\vec{a} = (a_x, a_y)$

とする。空気抵抗ベクトル $\vec{F}_D = (F_{Dx}, F_{Dy})$ はボールの進行方向と逆向きに大きさ F_D は $F_D = \frac{1}{2}C_D\rho S v^2$ であることが知られている。 ρ は空気密度であり、 S はボールの断面積である。 C_D は空気抵抗係数と呼ばれ、物体の形や表面の状態によって変化する定数である。 $\rho = 1.21\text{kg/m}^3$ 、 $S = 0.00385\text{m}^2$ 、 $C_D = 0.40$ 程度とされている。また、ボールが回転するときにはボールの進行方向に対して直角方向にマグナス力と呼ばれている大きさ F_L の力 $\vec{F}_L = (F_{Lx}, F_{Ly})$ が定数を k として、大きさ $F_L = k\rho S v \omega$ の揚力がはたらいっていることが知られている。野球ボールの場合 $k = 6.05 \times 10^{-4}[\text{m/rad}]$ とされている。上昇角を w とすると、 $\cos w = \frac{v_x}{v}$ 、 $\sin w = \frac{v_y}{v}$ となるので、各成分は図5 Bを参考にすると、

$$F_{Dx} = -F_D \frac{v_x}{v}, F_{Dy} = (\text{⑧}[F_D, v_y, v]), F_{Lx} = (\text{⑨}[F_L, v_y, v]), F_{Ly} = F_L \frac{v_x}{v} \text{となる。}$$

重力加速度の大きさを g とすると、重力 $\vec{W}$ の大きさ W は $W = (\text{⑩}[m, g])$ であらわされる。各ベクトルの位置関係は図5 Aのようにあらわされる。よって、運動方程式は

$$m\vec{a} = (\text{⑪}[\vec{W}, \vec{F}_D, \vec{F}_L]) \quad (\text{iv})$$

となる。

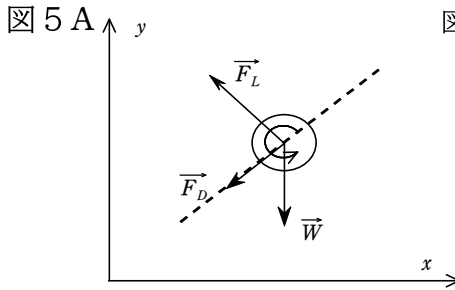
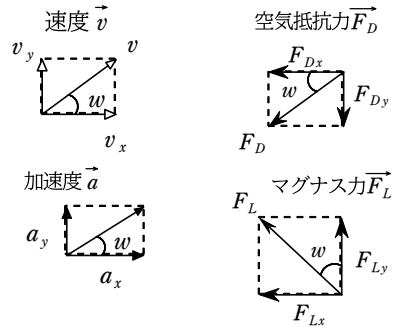


図 5 B



微小時間 Δt 間に力が一定であるとして、シミュレーション計算をしてみる。ある時刻 t の速度 $\vec{v}$ を用いて、 $\vec{F}_D, \vec{F}_L$ を計算し、(iv)より加速度 $\vec{a}$ を求める。その $\vec{a}$ を用いて Δt 後の速度 $\vec{v}'$ は $\vec{v}' = (12[\vec{v}, \vec{a}, \Delta t])$ で求められ、位置 $\vec{x}'$ は $\vec{x}' = (13[\vec{x}, \vec{v}, \Delta t])$ で求めることができる。その $\vec{v}'$ を用いて、 Δt 後の加速度 $\vec{a}'$ を計算する。同様にして、次々とボールの位置を計算することができる。次々と計算するなかで、再び $y=0$ に達したときが落下点でその時の x が飛距離となる。

標準的なストレート $v_0=42\text{m/s}$ 、 $\theta=7.0^\circ$ 、 $\omega_0=250\text{rad/s}$ (40Hz)、 $V_0=37\text{m/s}$ とフォークボール $v_0=36\text{m/s}$ 、 $\theta=19^\circ$ 、 $\omega_0=0\text{rad/s}$ 、 $V_0=31.5\text{m/s}$ で打った場合を様々な角度 α で(ii-1)から(iv-2)までの式に代入して計算をした結果が次ページの図6である。バットスイング角度が1度上昇するごとに平均0.45m/sずつスイング速度が低下するというデータをもとにスイング速度を推定している。太線が初速度の大きさと細線が上昇角を示し、実線がストレート、破線がフォークボールを示している。

これを見るとストレートは打球は速いが上昇角が低く、フォークボールは打球が遅いが上昇角が高いことがわかる。次にこれらの打球の上昇角と飛距離の関係をグラフにしたのが次ページの図7である。

図7はストレート(実線)およびフォークボール(破線)の上昇角と飛距離との関係をシミュレーション計算した結果を示している。横軸が打撃直後のボールの上昇角で縦軸がその時の飛距離を示している。飛距離は本来秒速であるがわかりやすいように時速で示した。グラフ上の黒点は大谷選手がMLBで放ったホームランのデータである。グラフによればこの計算結果は大谷選手のホームランのデータ領域に入っていることがわかる。

図6図7のグラフを見ることによりストレートの最大飛距離となるのは(14[数値])°の角度で上昇したときで、この時のバットとボールの接触角 α は 31° でボールの速さは165km/hとなり、その飛距離は126mである。また、フォークボールが最大飛距離となるのは上昇角が 35° で接触角 α が(15[数値])°で155km/hとなり、その距離は122mとなっている。

この計算結果より、レベルスイングの場合ストレートは最大飛距離となる角度が(14)°とボールが高く上がりにくいことがわかる。これは、ボールとバットが接触した瞬間、ボールの回転によって、ボールに下向きの力が働いたためであると考えられる。そのため、ストレートをホームランするにはアップスイングの方が適しているといえる。

図6

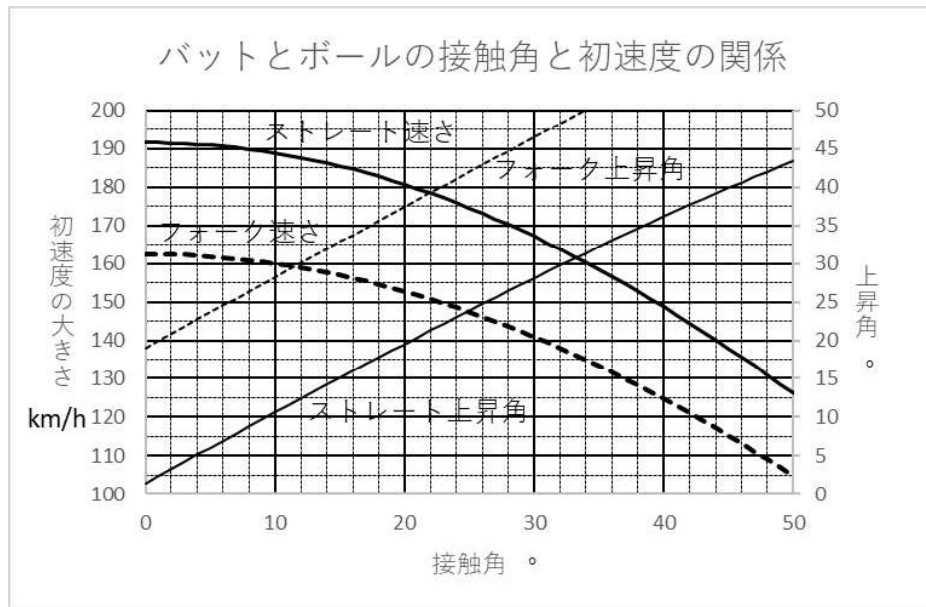
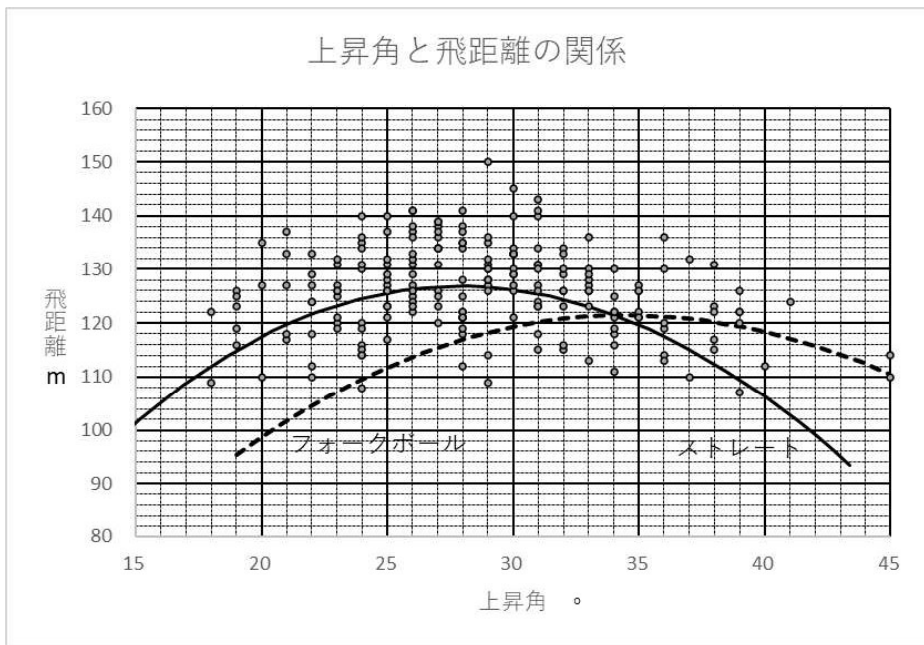
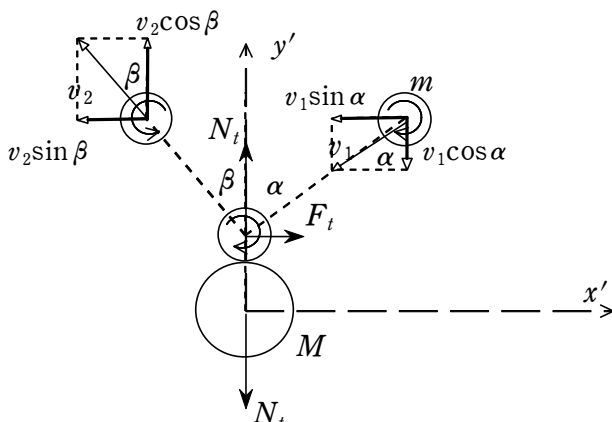


図7



解説

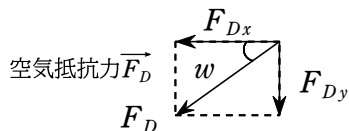
- ① v_0 と V_0 は逆向きの速度である。 V_0 の向きを正とすると、景色の速度は $-V_0$ であり、ボールの速度も $-v_0$ となる。よって、相対速度は $-v_0 - (-V_0)$ となるが、大きさなので、 $v_0 + V_0$



- ② 速度を分解すると上図のようになる。力積は運動量の差（後－前）なので、
 $F_t = mv_2 \sin \beta - mv_1 \sin \alpha$ となる。よって、 $mv_2 \sin \beta$
- ③ 同様にしてボールにかかる力積は上向きの N_t であり、衝突前の運動量は $-mv_1 \cos \alpha$ となるので、
 $N_t = mv_2 \cos \beta - (-mv_1 \cos \alpha) = mv_2 \cos \beta + mv_1 \cos \alpha$
 よって、 $mv_2 \cos \beta$
- ④ バットに働く力積は下向きの N_t である。衝突前のバットから見た相対速度を使っているため、衝突前のバットの速度は0で衝突後が $-V_2$ である。
 $-N_t = -MV_2 - M \times 0$ となるので、 $N_t = MV_2$ よって、 MV_2
 運動量関係は符号を間違えやすいので一つ一つ確実に確認すること。
- ⑤ 半径 r 角速度 ω の周回速度なので、 $r\omega$
- ⑥ y' 方向で考える。衝突前のボールの相対速度は $-v_1 \cos \alpha$ であり、衝突後はボールが $v_2 \cos \beta$ であり、バットが $-V_2$ なので、バットから見た相対速度は $v_2 \cos \beta - (-V_2) = v_2 \cos \beta + V_2$
 反発係数は $e = -\frac{v_2 \cos \beta + V_2}{-v_1 \cos \alpha}$ となるので、 $e = \frac{v_2 \cos \beta + V_2}{v_1 \cos \alpha}$
 $v_1 \cos \alpha$
- ⑦ V_0 は水平より θ 上向きであり、ボールは V_0 より ϕ 上向きに飛んでいくので、ボールは水平より $\phi + \theta$ 上方に飛ぶことになる。 $\phi + \theta$
- ⑧ 空気抵抗力は右図より

$$F_{Dy} = -F_D \sin w \quad \sin w = \frac{v_y}{v} \quad \text{なので、}$$

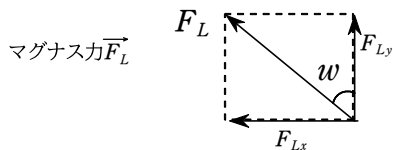
$$F_{Dy} = -F_D \frac{v_y}{v}$$



- ⑨ マグナス力は右図より

$$F_{Lx} = -F_L \sin w \quad \sin w = \frac{v_y}{v} \text{ なので、}$$

$$F_{Lx} = -F_L \frac{v_y}{v}$$

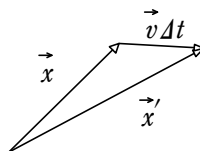
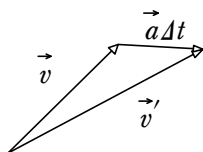


- ⑩ 重力なので、 mg

- ⑪ 運動方程式で働く力はすべての力の合力（和）である。 $\vec{W} + \vec{F}_D + \vec{F}_L$

- ⑫ 右図より $\vec{v} + \vec{a}\Delta t$

- ⑬ 右図より $\vec{x} + \vec{v}\Delta t$



- ⑭ 図7より、ストレートの飛距離が最大になっているのは上昇角が 28° の時である。

- ⑮ 図7より、フォークボールの飛距離が最大になっているのは上昇角が 35° の時である。
図6により、フォークボールの上昇角が 35° になっているときの接触角は 18° の時である。
つまり、ボールの進行方向に対してボールの中央より 18° 下（ボールは 19° 下がりながら飛んでくるので、水平方向に対して 37° 下）の部分にバットをあてれば最大飛距離となる。