

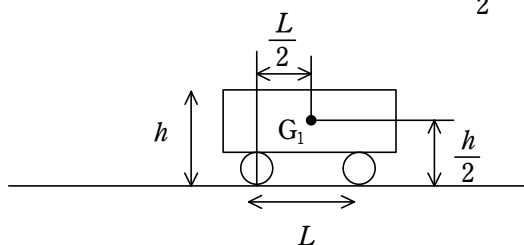
G069台車降ろし

1

安古市高校では体育館の椅子を収めるときに椅子を台車に載せて緩やかな斜面を降ろしている。この時に支えている人が加える力について考えた以下の文章の(①)～(⑩)内の[]に文字が示されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

図1のように台車を定義する。椅子を乗せた質量 M の台車の前後輪の間隔を L 、台車の高さを h とする。また、重心は中心（前後輪の中間、高さ $\frac{h}{2}$ ）の位置とする。

図1



この台車を図2のように角度 θ の斜面をゆっくりと降ろす場合を考え、斜面方向を x 軸、その直角方向を y 軸とする。台車の上端点Sに大きさ F の力を x 軸方向に加えて台車を支えたとする。前輪に働く垂直抗力を N_1 、後輪に働く垂直抗力を N_2 とする。

重力加速度の大きさを g とすると、重力の x 方向成分は(①[M, g, θ])であり、 y 成分は(②[M, g, θ]) $Mg \cos \theta$ である。よって、

$$x \text{ 方向の釣り合いの式は } F = \text{(①)} \quad (\text{i})$$

$$y \text{ 方向の釣り合いの式は } (\text{③}[N_1, N_2]) = \text{(②)} \quad (\text{ii})$$

となる。回転中心を重心と考えて回転の釣り合いの式を立てると、

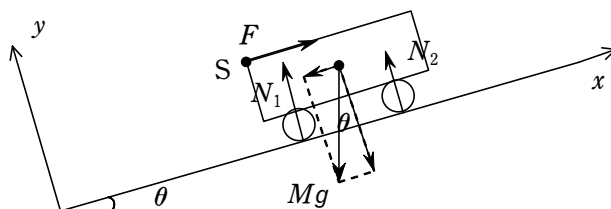
$$(\text{④}[F, h]) = \frac{1}{2} L (N_2 - N_1) \text{ となる。}$$

これらを連立させて解くと、

$$F = Mg \sin \theta \quad N_1 = \frac{1}{2} Mg \left(\cos \theta - \frac{h}{L} \sin \theta \right) \quad N_2 = \frac{1}{2} Mg \left(\cos \theta + \frac{h}{L} \sin \theta \right)$$

となり、後輪にかかる垂直抗力の方が大きい。

図2

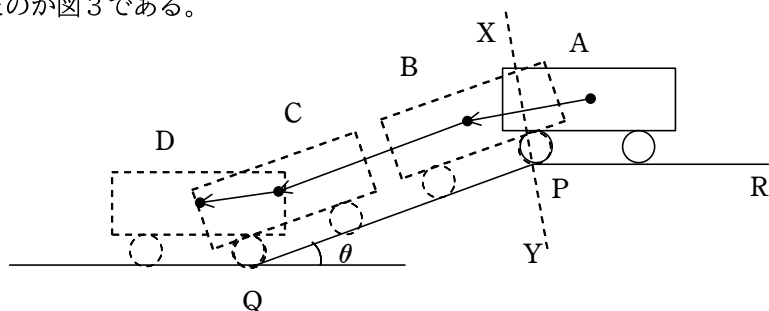


台車の前輪が斜面の上端Pに達した瞬間をA、後輪がPに達した瞬間をB、斜面を下った後、前輪が斜面の下端Qに達した瞬間をC、後輪がQに達した瞬間をDとする。

G069台車降ろし

この様子を表したのが図3である。

図3



台車をBC間を降ろすときは下にいる人が押す力の大きさは(i)であらわされる。AB間、CD間はどうか考えればよいであろうか。

A～Bに至るとき、前後輪共に直線上を移動している。その結果、重心も直線上を移動している（正式な証明は複雑なので省略）ことがわかる。直線ABの水平面に対する傾角を求めてみよう。AとBおよび斜面PQと水平面PRは線分XYを対称軸とした線対称であり、 $AB \perp XY$ となる。 $\angle QPR = 180^\circ - \theta$ となるので、 $\angle YPR = 90^\circ - \frac{\theta}{2}$ となる。よって、線分ABとPRのなす角度は (5)[θ] となる。

AB間を移動させるとき、支えるのに必要な力は図2を参考にすると $Mg \sin \frac{\theta}{2}$ であらわされる。よって、A～Dに移動させるとき、AB間で支える力は $Mg \sin \frac{\theta}{2}$ 、BC間では $Mg \sin \theta$ 、CD間ではAB間と同じと考えられるので $Mg \sin \frac{\theta}{2}$ である。

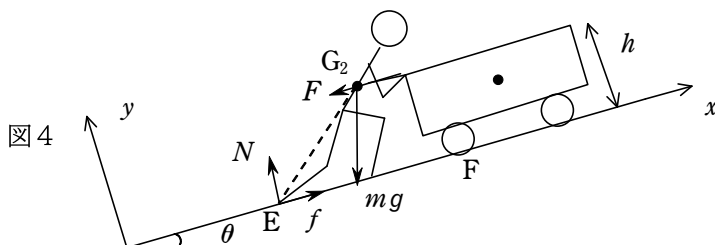
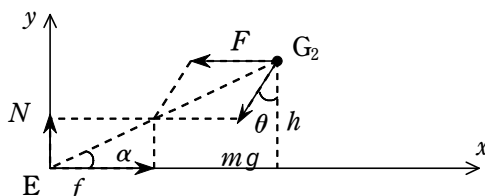


図4のように、転がり落ちようとする台車を人が支える場合を考えてみよう。足に働く摩擦力で支えるのであるが、計算が複雑化するので、簡単のために前足が浮いており、すべての荷重が後足に働いていると仮定して摩擦力の計算をしてみよう。後足と斜面の接点をE、押している人の重心の位置を G_2 、前輪と斜面の接点をFとし、 $\angle FEG_2 = \alpha$ とする。また、人の重心の高さは台車の上端と同じ高さ h とする。

図5



斜面上のこの人に働く力をEを原点とする xy 平面に書き直したのが図5である。図

G069台車降ろし

5 より、

$$x \text{ 軸方向の力の釣り合いの式} \quad f = (\textcircled{6}[F, m, g, \theta]) \quad (\text{iii})$$

$$y \text{ 軸方向の力の釣り合いの式} \quad N = (\textcircled{7}[m, g, \theta]) \quad (\text{iv})$$

G_2 を回転中心とする回転の釣り合いの式は、Eに働く垂直抗力と摩擦力の合力が G_2 を向いていればよいので、 $\tan \alpha = (\textcircled{8}[N, f])$

が成り立つ。

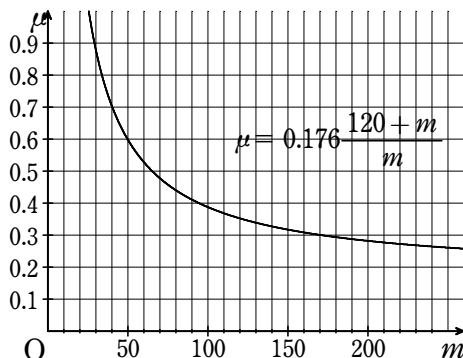
静止摩擦係数を μ とすると $\mu > \frac{f}{N}$ のとき滑らない。(i),(iii),(iv)より $\frac{f}{N}$ の値を求めると、

$$\frac{f}{N} = \frac{(M+m)g \sin \theta}{mg \cos \theta} = \frac{M+m}{m} \tan \theta \text{ となる。}$$

よって、滑らないためには支える人の質量 m が大きいほど良いことになる。よって、複数人で支える必要がある。

傾斜角 θ を測定すると $\theta = 10^\circ$ であった。 $\tan 10^\circ = 0.176$ とし、台車の質量 $M = 120\text{kg}$ として、 m と μ との関係をグラフにすると、図6のようになった。

図 6



体重60kgの人が一人でこの台車を下ろそうとすると、静止摩擦係数は $(\textcircled{9}[\text{数値}])$ 以上が必要となる。 $\mu = 0.4$ とすると、この台車を支えられず事故が起こる。この斜面を安全にゆっくりとこの台車を下すのに体重60kgの人は $(\textcircled{10}[\text{数値}])$ 人以上必要である。

G069台車降ろし

解説

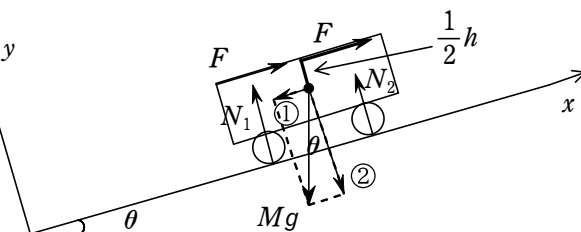
① 右図①なので、 $Mg\sin\theta$

② 右図②なので、 $Mg\cos\theta$

③ ②が y 軸負の方向の力なので、
正の方向の力は $N_1 + N_2$

④ 右図太線部分のモーメント

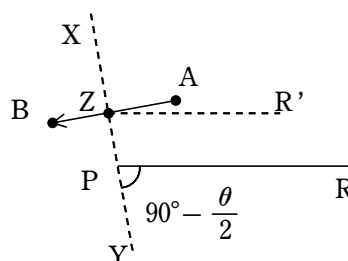
$$F \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}Fh$$



⑤ 右図でPがABとXYの交点Zに重なるように
線分PRを平行移動すると $\angle AZP = 90^\circ$ であり、

$$\angle YPR = 90^\circ - \frac{\theta}{2} \text{ なので、 } \angle AZR' = \frac{\theta}{2}$$

これが、ABとPRのなす角である。



⑥ mg を分解すると x 方向成分は
 $mg\sin\theta$ 。よって、 f と等しいのは
 $F + mg\sin\theta$

⑦ mg を分解すると y 方向成分は
 $mg\cos\theta$ 。
よって、 N と等しいのは $mg\cos\theta$

⑧ $\tan\alpha$ なので、 $\frac{N}{f}$

⑨ 図6で $m = 60$ の時の μ を読み取ると $\mu = 0.5$

⑩ $\mu = 0.4$ なので、これに該当する m は 90kg である。体重 60kg の人が二人いれば 90kg を超える 2人以上必要

