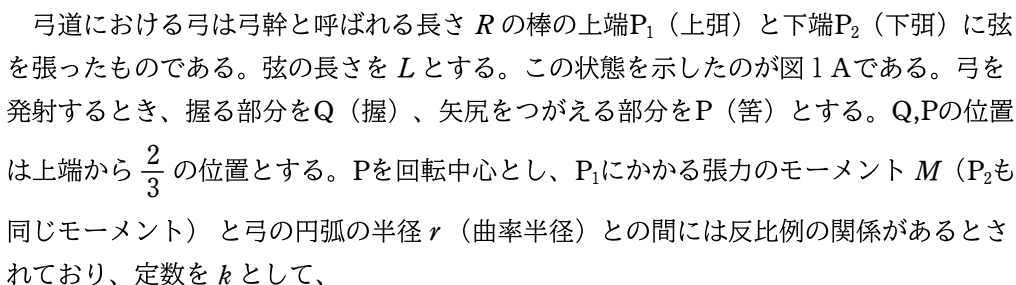


1

<引いていない状態の弓>



$$Mr=k \quad (\text{i})$$

$\mathbf{SM} = \mathbf{r} - \mathbf{r} \times (\textcircled{1}[\theta])$ となるので、弓にかかるモーメントは $T\mathbf{r}(1 - (\textcircled{1}))$ となる。反比例の定数を k と置くと(i)は

$$Tr^2(1 - (\textcircled{1})) = k \quad (\text{ii})$$

QからOSに下した垂線とOSとの交点をHとすると、三平方の定理より $OH^2 + QH^2 = OQ^2$ が成立する。これを式にすると、

$$(x_0 + r \times (\textcircled{1}))^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2 = r^2$$

$\triangle OP_1P_2$ に注目すると、 $L=2r\sin\frac{\theta}{2}$ となる。これを用いて θ を消去すると

$$\left(x_0 + \sqrt{r^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{L}{6}\right)^2 = r^2$$

これを r について解くと $r = \frac{\sqrt{(L^2 + 9x_0^2)(4L^2 + 9x_0^2)}}{18x_0}$

$L=2.21\text{m}$ 、 $x_0=0.15\text{m}$ とすると、数値的に $r=3.71\text{m}$ となる。

G068弓道矢の発射

$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{L}{2r}$ より $\theta = 0.605 \text{ rad}$ となる。これは、度数法で $\theta = 34.7^\circ$ である。

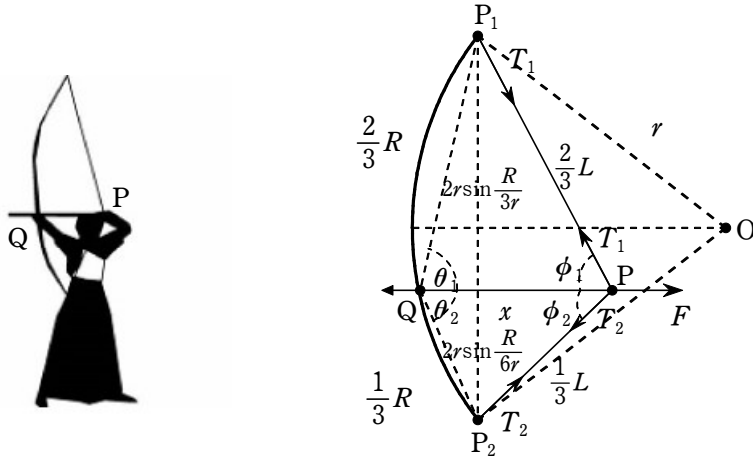
(ii)より、 $\frac{k}{T} = r^2(1 - (\text{①})) = 1.24 \text{ m}^2$ $R = (\text{②}[r, \theta]) = 2.24 \text{ m}$

となる。

<弓を弾き $PQ = x$ となった時の r の算出>

$PQ = x$ の時の弓の状態を示したのが図2である。

図2



$P_1P = \frac{2}{3}L$ 、 $P_2P = \frac{1}{3}L$ となり、 $\angle PQP_1 = \theta_1$ 、 $\angle PQP_2 = \theta_2$ とすると、弧 $P_1Q = \frac{2}{3}R$ 、弧 $P_2Q = \frac{1}{3}R$ なので、 $\angle P_1OQ = \frac{2R}{3r}$ 、 $\angle P_2OQ = \frac{R}{3r}$ となり、 $\triangle P_1OQ$ 、 $\triangle P_2OQ$ に注目して $P_1Q = 2r \sin \frac{R}{3r}$ 、 $P_2Q = 2r \sin \frac{R}{6r}$ となる。これを用いると、

$\triangle PQP_1$ で

$$\text{正弦定理} \quad \frac{2r \sin \frac{R}{3r}}{\sin \phi_1} = \frac{2L}{3 \sin \theta_1} \quad \text{余弦定理} \quad \cos \phi_1 = \frac{x^2 + \left(\frac{2}{3}L\right)^2 - \left(2r \sin \frac{R}{3r}\right)^2}{\frac{2}{3}Lx} \quad (\text{iii})$$

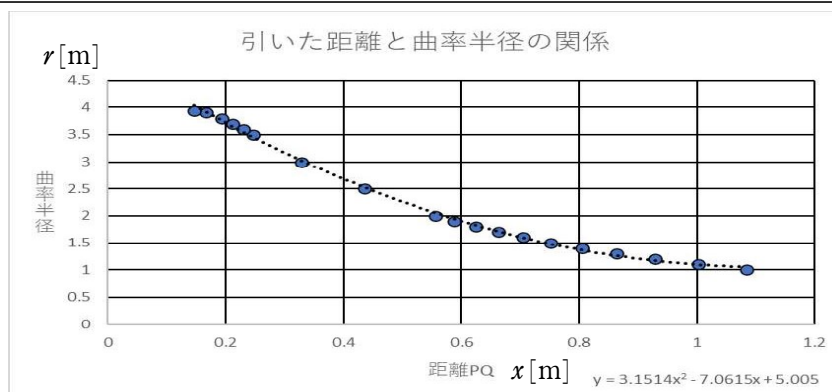
$\triangle PQP_2$ で

$$\text{正弦定理} \quad \frac{2r \sin \frac{R}{6r}}{\sin \phi_2} = \frac{L}{3 \sin \theta_2} \quad \text{余弦定理} \quad \cos \phi_2 = \frac{x^2 + \left(\frac{1}{3}L\right)^2 - \left(2r \sin \frac{R}{6r}\right)^2}{\frac{1}{3}Lx} \quad (\text{iv})$$

また、 $\angle P_1OP_2 = (\text{③}[\theta_1, \theta_2])$ となるので、 $R = r \times (\text{③})$

これらの式から ϕ_1 、 ϕ_2 、 θ_1 、 θ_2 を消去すると r と x の関係が求められるが、この計算は非常に複雑な上に、求めた式も非常に複雑なので省略する。この式を用いて数値計算した結果をグラフに黒点であらわしたのが次ページの図3である。

図 3



計算結果が黒点で表されているが、簡単に計算するために二次関数で近似したところ（図3の点線）が計算結果とよく一致している。この二次関数を下に示す。以降この近似式を $r(x)$ とおく。

$$r(x) = 3.1514x^2 - 7.0615x + 5.005$$

< 矢に働いている力の算出 >

弦P₁Pに働く張力の大きさを T_1 、弦P₂Pに働く張力の大きさを T_2 とする。点Pを水平に大きさ F の力で引いているとすると、矢が水平に飛び出すためには鉛直方向の釣り合いが成り立っている必要がある。よって、次の式が成り立つ。

$$(4)[T_1, \phi_1] = (5)[T_2, \phi_2]$$

$$(6)[T_1, \phi_1] + (7)[T_2, \phi_2] = F$$

また、Qを回転中心として T_1 によるモーメント $(8)[x, T_1, \phi_1]$ と T_2 によるモーメント $(9)[x, T_2, \phi_2]$ は弓自体に回転の釣り合いが成立しているので、等しくなければならない。これは、(4) = (5) より明らかである。

これを解くと、

$$T_1 = \frac{\sin \phi_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} F \quad T_2 = \frac{\sin \phi_1}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} F \quad (v)$$

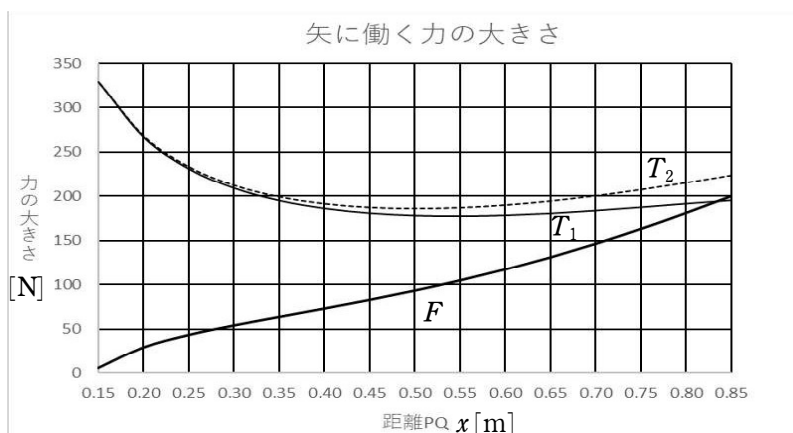
Qを回転中心とする T_1 のモーメントは (8) なので、(i)より、 $r(x) \times (8) = k$ となり、 k が求められる。

$$k = r(x) x \frac{\sin \phi_1 \sin \phi_2}{\sin(\phi_1 + \phi_2)} F \quad (vi)$$

発射直前に弓を弾いている力を弓力という。上級者では弓力が200Nの弓を用いている。最大限弓を弾いているときの x を0.85mとすると、 $r(0.85) = 1.28m$ となる。 $F = 200N$ となるので、(iii)(iv)の余弦定理より、 $\phi_1 = 1.20rad$ 、 $\phi_2 = 0.955rad$ となる。この値を用いると(vi)より $k = 198Nm^2$ となる。

$k = 198Nm^2$ として、様々な x ($0.15 < x < 1.0$) において、 $r(x)$ を求め、(iii)(iv)の余弦定理より求めた ϕ_1 、 ϕ_2 を用いて、(vi)式で F を求める。この力 F が矢を加速する力となる。さらに(v)式で T_1 、 T_2 を求め、 F, T_1, T_2 の値をグラフで表したのが図4である。

図 4



<飛び出す瞬間の矢の速さの算出>

力の大きさを f 、力の方向に移動した距離を Δx とすると、その間にその力がした仕事 ΔW は $\Delta W = (\textcircled{10}[f, \Delta x])$ とあらわされる。力の大きさが変化しているので Δx を微小値に取り、その間力の大きさが一定であるとして、 $x=0.85$ から矢が弦から離れる $x=0.15$ まで、すべての ΔW を合計すると弦がした仕事 W が求められる。これは図 4 F のグラフ下面積と等しい。計算すると、 $W=69.3\text{J}$ となった。よって、弓の持つ位置エネルギー U は $U=69.3\text{J}$ となる。この位置エネルギーが運動エネルギーになると考えると、矢の質量を m 、飛び出した瞬間の矢の速さを v とすると、 $U = (\textcircled{11}[m, v])$ の式が成り立つ。矢の質量を 0.030kg とすると、 $v=68.0\text{m/s}$ と計算される。

弓道の上級者による実験では弓力 200N の弓を使うと発射の瞬間の速さは 60m/s に達するとされている。この場合の矢の運動エネルギーは 54J となり、弓の位置エネルギーがすべて矢の運動エネルギーになっているわけではないことがわかる。計算すると、弓の持つ位置エネルギー U の 0.78 倍が矢の運動エネルギーに変換されたことになる。これを変換効率とする。残りのエネルギーは弓がもとの形に戻るときの弓の内部摩擦と、矢が飛び出すときの力の反作用を受けた人体に吸収されたものと考えられる。

図 4 の F のグラフはほぼ一次関数であるので、一次関数と考えると近似式が作れる。弓力を F 、発射直前の PQ を 0.85m とすると、矢が加速する距離は 0.70m となり、平均の力を用いると仕事 W は $(\textcircled{12}[F])$ となる。変換効率が α の場合 αW が運動エネルギーに変化するので、

$$v = 0.837 \sqrt{\alpha \frac{F}{m}}$$

であらわされることになる。 $F=200\text{N}$ 、 $m=0.030\text{kg}$ 、 $\alpha=0.78$ を代入すると $v=60.3\text{m/s}$ となる。高精度な計算では $v=60.0$ なので、この式は十分な精度が出せていることがわかる。ただし、 α の値は人体に吸収されるエネルギーを含むので、射手によって異なると思われる。

G068弓道矢の発射

解説

- ① $SM=SO-MO$ なので、 $r \times$ (①) は MO である。図 1 B より、 $\triangle P_1OM$ で、

$$\angle MOP_1 = \frac{\theta}{2} \text{ より、} MO = r \cos \frac{\theta}{2} \text{ となる。よって、} \cos \frac{\theta}{2}$$

- ② 半径 r 中心角 θ の扇形の弧の長さなので、 $r\theta$

- ③ $\angle P_1QP_2 = \theta_1 + \theta_2$ であり、この角は円弧 P_1QP_2 の円周角である。中心核は円周角の 2 倍であるから $\angle P_1OP_2$ の外角は $2\theta_1 + 2\theta_2$ となる。よって、内角は $2\pi - 2\theta_1 - 2\theta_2$

- ④ 図 2 の T_1 の鉛直成分となるので、 $T_1 \sin \phi_1$

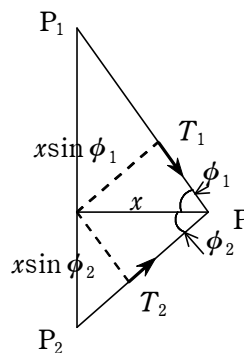
- ⑤ 図 2 の T_2 の鉛直成分となるので、 $T_2 \sin \phi_2$

- ⑥ 図 2 の T_1 の水平成分となるので、 $T_1 \cos \phi_1$

- ⑦ 図 2 の T_2 の水平成分となるので、 $T_2 \cos \phi_2$

- ⑧ 右図より $xT_1 \sin \phi_1$

- ⑨ 右図より $xT_2 \sin \phi_2$



- ⑩ 仕事なので、力と距離の積 $f\Delta x$

- ⑪ 運動エネルギーなので、 $\frac{1}{2}mv^2$

- ⑫ 最初 P 点にあるときの矢に働く力の大きさは F 、矢が放たれる瞬間 M 点にあるときの力の大きさは 0 なので、平均の力は $\frac{1}{2}F$ 、加速する距離が 0.70m なので、両者をかけて $0.35F$