

G064戦艦大和主砲弾

1

戦艦大和の砲弾に関する以下の文章の(①)～(⑬)内の[]に文字が示されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

戦艦大和は第二次世界大戦時世界最大の戦艦として有名であった。大和は直径46cm、質量1470kgの主砲弾を45度の角度で780m/sの初速で発射すると42km先に着弾したとされている。この砲弾の軌道を物理的に考えてみよう。厳密には地球の湾曲も考慮する必要があるが、ここでは、平面と考えて計算するものとする。

<真空中の飛距離>

まずは空気抵抗はないものとして着弾距離を計算してみよう。

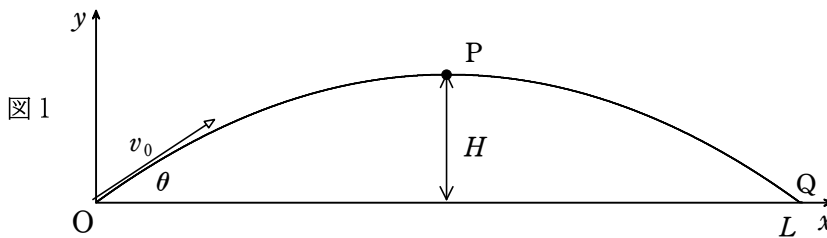


図1のように原点Oから、角度 θ の方向に初速度の大きさ v_0 で砲弾を発射したとき、高さ H の最高点Pを通過後 $OQ = L$ となる位置Qに着弾したとする。初速度の鉛直成分は(① $[v_0, \theta]$)なので重力加速度の大きさを g とすると、最高点Pに達する時刻 t_P は $t_P =$ (② $[v_0, \theta, g]$)であらわされる。また、Qに達する時刻 $t_Q = 2t_P$ である。

初速度の水平成分は(③ $[v_0, \theta]$)であり、2倍角の公式 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$ を用いると、水平到達距離 $L =$ (④ $[v_0, \theta, g]$)となる。 $\sin 2\theta$ は $\theta = 45^\circ$ のとき、最大値となるので、 $\theta = 45^\circ$ のとき、最大射程となり、その距離は $\frac{v_0^2}{g}$ である。

最高点では速度の鉛直方向成分が0なので、OP間の鉛直方向の平均速度は(⑤ $[v_0, \theta]$)となるので、最高点の高さ $H =$ (⑥ $[v_0, \theta, g]$)となる。

$\theta = 45^\circ$ 、 $v_0 = 780$ 、 $g = 9.80$ を用いると、 $t_Q = 113\text{s}$ のとき $L = 6.21 \times 10^4 \text{m} = 62.1 \text{km}$ となる。

<空気抵抗を考慮した運動方程式>

次に空気抵抗を考慮して飛距離を計算してみよう。空気抵抗 F_D は $F_D = \frac{1}{2}C_D\rho S v^2$ の式が成り立つことが知られている。 ρ は空気密度 $[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 S は前面投影断面積(空気抵抗を受ける断面積) $[\text{m}^2]$ 、 v は飛翔物体の速さ $[\text{m}/\text{s}]$ 、 C_D は空気抗力係数と呼ばれており、飛翔物体の形状によって決まる定数である。通常0～1程度である。大和の砲弾はかなりの上空を飛翔すると考えられ上空の空気密度が必要となる。上空の空気密度は高さを h [m]として

$$\rho = 1.3 \times 0.863^{\frac{h}{1000}} \quad (\text{i})$$

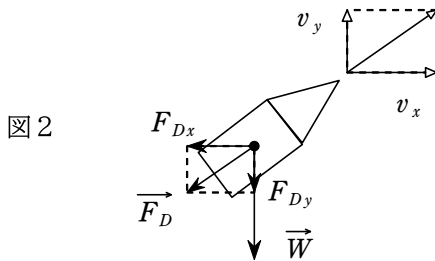
G064戦艦大和主砲弾

であらわされることが知られている。

x 成分、 y 成分のベクトルを (x,y) であらわすものとする。砲弾の速度ベクトル $\vec{v}$ の水平成分を v_x 、鉛直成分を v_y とするとき、 $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 、加速度 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ 、変位 $\vec{x} = (x,y)$ とする。砲弾の質量を m とすると、空気抵抗力 $\vec{F}_D = (-F_{Dx} - F_{Dy})$ 、重力 $\vec{W} = (0, -mg)$ とあらわされる。これらを利用してベクトルによる運動方程式を立てると、

$$m\vec{a} = (\textcircled{7}[\vec{F}_D, \vec{W}]) \quad (\text{ii})$$

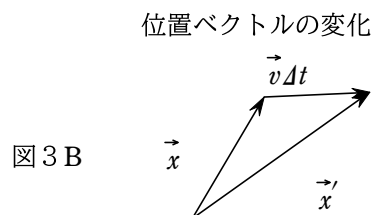
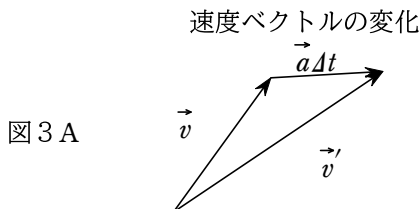
とあらわされる。



ここで、 $F_{Dx} = \frac{1}{2}C_D\rho S v_x^2$ 、 $F_{Dy} = \frac{1}{2}C_D\rho S v_y^2$ であらわされるものとする。

<シミュレーション計算>

ある時刻における速度、位置ベクトルをそれぞれ $\vec{v}$ 、 $\vec{x}$ であるとし、この $\vec{x}$ の y 成分を用いて (i) 式よりその高度の空気密度を計算し、その値と $\vec{v}$ を用いて (ii) より $\vec{a}$ を求めることができる。その後 時間 Δt 間の加速度が一定であると仮定すると、 Δt 後の速度 $\vec{v}'$ は図 3 A で分かる通り、 $\vec{v}' = (\textcircled{8}[\vec{v}, \vec{a}, \Delta t])$ であらわされ、 $\vec{v}$ が一定であると仮定すると、図 3 B で分かる通り、位置 $\vec{x}'$ は、 $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}\Delta t$ であらわされる。この $\vec{v}'$ 、 $\vec{x}'$ を $\vec{v}$ 、 $\vec{x}$ と考えて同様の計算をすると、さらに Δt 後の $\vec{v}'$ 、 $\vec{x}'$ を求めることができる。このようにして y が再び 0 になるまでこの計算を繰り返していくと、 $y=0$ となった時の x の値が着弾距離となる。各時刻における $\vec{v}$ 、 $\vec{x}$ を順次求めていく方法はシミュレーション計算と呼ばれており、科学技術計算に頻繁に使われている手法である。 Δt の間に加速度が一定であると仮定しているが実際は変化しているので、 Δt を長くとると精度が悪くなるがある程度小さい値をとると正確に求めることができる。



<計算精度の確認>

Δt をいろいろと変化させて、真空中 ($C_D=0$) における着弾距離を計算してみる。真

G064戦艦大和主砲弾

空中の理論値は最初に計算したとおり、 $t_Q=112.5\text{s}$ のとき $L=6.208\times 10^4\text{m}$ である。この時の値を表では $\Delta t=0$ であらわしている。 Δt を0.1s、0.5s、1.0s、2.0sの場合のシミュレーション計算結果を下の表に示した。この場合有効数字2桁程度を必要とすれば、 $\Delta t=1.0\text{s}$ でよいことになる。 Δt を小さくすれば小さくするほど計算精度は上がるが、その分計算に時間がかかることになる。

表

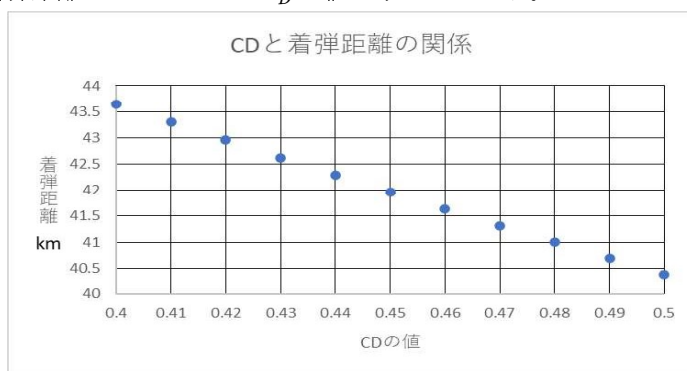
Δt	0	0.10	0.50	1.0	2.0
t_Q	112.5	112.5	112.0	111.5	110.5
$L\times 10^{-4}$	6.208	6.203	6.181	6.153	6.097

以降は $\Delta t=1.0\text{s}$ として計算する。

< C_D の算出>

戦時中の実測値が 45° で打ち上げた時、42km先に着弾した記録がある。 $\Delta t=1.0\text{s}$ で計算して着弾距離が42kmとなる C_D の値を求めてみよう。

図 4

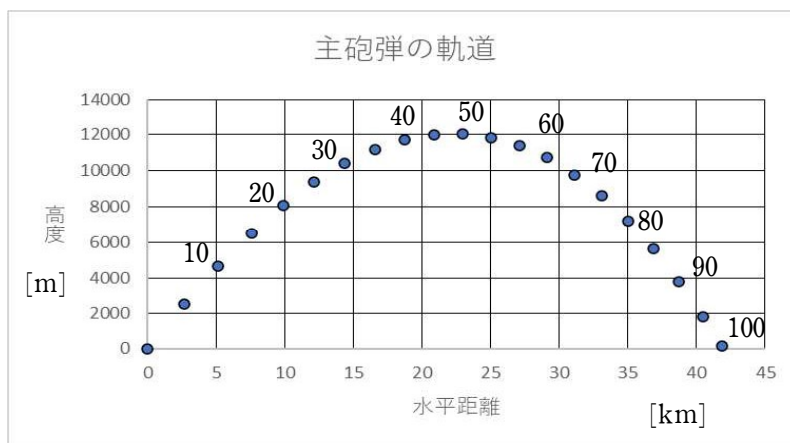


C_D をいろいろと変えてシミュレーション計算した結果が図4である。これによると、大和の砲弾の C_D は(⑨[数値])であることがわかる。

<主砲弾の軌道>

図5は初速780m/sで 45° の方向に $C_D=(⑨)$ で打ち上げた時の主砲弾の軌道を示している。グラフ上の点は打ち上げてから5秒ごとの位置を示しており、近くの数値は打ち上げてからの時間を示している。

図 5



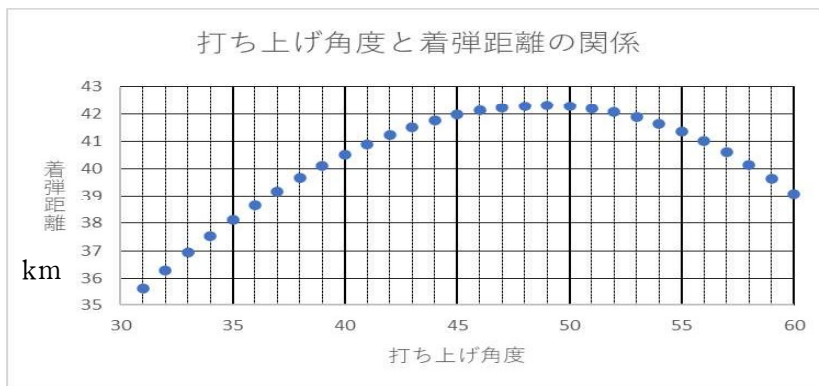
G064戦艦大和主砲弾

図5より、大和の主砲弾は打ち上げてから (⑩[数値]) s後に最高点 (⑪[数値]) kmに達し、100s後に42km先に落下することがわかる。

<最大射程となる角度の算出>

次に打ち上げ角度を変えることによる着弾距離を計算してみよう。

図 6



打ち上げ角度を色々変えて着弾距離をシミュレーション計算したのが図6である。このグラフから最大射程となるのは (⑫[数値]) °で打ち上げた時となる。

大和の後部甲板には飛行機が搭載されている。大和が砲弾を打ち上げるとき、飛行機を飛ばして着弾位置を確認するためのものである。着弾距離は厳密にはその日の風・気温・湿度などが関係するので、必ずしもこの計算結果と一致しない。そのため、一発ごとに飛行機で着弾位置を確認して、角度を調整することにより敵艦に命中させることを考えていた。

ある時40°で打ち上げた時、目標より500m手前に着弾した。目標に命中させるには図6より (⑬[数値]) °で打ち上げればよいことがわかる。

G064戦艦大和主砲弾

解説

① 右図より $v_0 \sin \theta$

② 1s間に g ずつ減じるので、 $v_0 \sin \theta$ を g

で割ればよい。 $\frac{v_0 \sin \theta}{g}$

③ 右図より $v_0 \cos \theta$

④ 平均速度は $v_0 \cos \theta$ で、時間は $\frac{2v_0 \sin \theta}{g}$ なので、

$$L = v_0 \cos \theta \times \frac{2v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

⑤ 鉛直方向の平均速度は $\frac{0 + v_0 \sin \theta}{2} = \frac{v_0 \sin \theta}{2}$

⑥ 平均速度は $\frac{v_0 \sin \theta}{2}$ で、時間は $\frac{v_0 \sin \theta}{g}$ なので、

$$\frac{v_0 \sin \theta}{2} \times \frac{v_0 \sin \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g}$$

⑦ 運動方程式の力は働いている力の合力である。 $\vec{F}_D + \vec{W}$

⑧ 図3Aより、 $\vec{v} + \vec{a}\Delta t$

⑨ グラフの42kmとなっている C_D を読む。 0.45

⑩ 最高点となっている時間を読む 50

⑪ 最高点の高さを読むが単位がmなので、kmに直す。12

⑫ 最大飛距離となっている角度を読む。 49

⑬ 40度で打ち上げた時の着弾距離は40.5kmである。これが、500m手前であるということから目標までの距離は41kmとなる。着弾距離が41kmとなっている打ち上げ角度は41度である。 41

