G061H3ロケット発射

日本の人工衛星を打ち上げる主力ロケットはＨ３である。水素燃料のロケットである。このロケットの打ち上げに関し以下の（①）～（⑫）の[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

＜燃料噴射による加速度＞

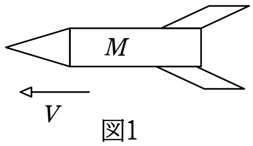


図1

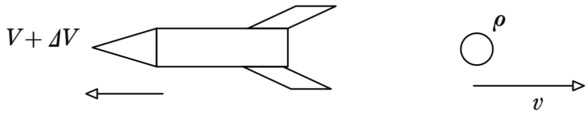


図2

質量M[kg]のロケットがρ[kg/s]の燃料を噴射速度vで噴射するときのロケット本体の加速度の大きさを計算してみよう。

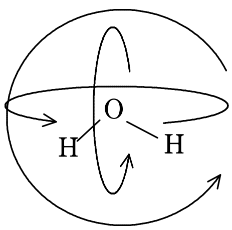
1秒間にρ[kg]の燃料をロケットから見た速度vで噴射するとする。燃料噴射によるロケットの加速度を a とし、 M に比べてρは遙か小さいので，ロケットの質量は変わらないものとする。ロケットから見て1s間の燃料噴射により燃料の運動量が後方に（①[ρ,v]）増加しているので運動量保存則よりロケット自体の運動量は前方に（①） 増加していることになる。1s間のロケットの運動量増加量は Ma であり、これは運動方程式より推進力 F となる。よって、ロケットの推進力は $F=$（①）となり、 $a=\dfrac{\rho v}{M}$ で表される。

つぎに噴射する燃料について考えてみよう。ロケットの質量が軽いほど加速度が大きくなるので，燃料も軽いほうがよい。液体燃料として効率の良い燃料は水素と言われている。水素燃料ロケットは燃料に水素と酸素を用いて，ロケット内の燃焼室で両者を反応させ，高圧の水蒸気として後ろに噴射している。このことをもとに水蒸気の噴射速度を計算してみよう。

＜水分子の定積モル比熱＞

n [mol]、絶対温度 T [K]の気体分子の並進運動エネルギー U_K は気体定数を R [J/mol K]とすると、 $U_K=$（②[数値]）nRT となる。3次元空間であり、エネルギーは各方向に均等半分されるので、1方向あたりの並進運動エネルギー U_1は $U_1=$（③[数値]）nRTとなる。次に回転運動エネルギーであるが、これもエネルギーが均等配分されるので一方向あたり $U_1=$（③） nRT となる。

図3



水分子の回転方向は図のように3方向存在している。よって、水分子の回転運動エネルギー U_R は $U_R=$（④[数値]） nRT となる。次に分子内の振動のエネルギーであるが、これは、酸素原子の質量に比べてH原子の質量が $\dfrac{1}{16}$ しかなく、ＯとＨは一緒に動くと考え

られ振動のエネルギーは0と考えることができる。また、水分子が高温の水蒸気の状態であることから、運動エネルギーに対して分子間力による位置エネルギーは無視することができるので、高温水蒸気の内部エネルギーは$U_K + U_R = 3nRT$となる。 よって、高温水蒸気の定積モル比熱は（⑤[数値]）R で表される。

＜燃料噴射速度＞

水素の燃焼熱Q[J/mol]を表す熱化学方程式は，

$$\mathrm{H_2}+\frac{1}{2}\mathrm{O_2}=\mathrm{H_2O}+\mathrm{Q}$$

となる。生じた水蒸気1molが得た熱量はQ[J]となる。気体定数をRとすると，水蒸気の定積モル比熱は（⑤）Rであらわされるために，内部エネルギーの上昇ΔUは水蒸気の物質量をn，温度上昇をΔTとすると，$\Delta U=$（⑤）$nR\Delta T$となる。この内部エネルギーは分子の並進運動エネルギーΔU_vと回転運動エネルギーΔU_rが合わさったものである。並進運動エネルギーΔU_vは単原子分子の内部エネルギーと同じ式であらわされるので

$\Delta U_v=$（②）$nR\Delta T$であらわされる。よって，発生した燃焼熱の$\frac{1}{2}$が並進運動エネルギーとなり，これがロケットの噴射速度になると仮定する。水蒸気のモル質量をm[kg/mol]とすると，噴射燃料1mol当たりの運動エネルギーを$m.v$であらわすと，（⑥[m,v]）であらわされ，これが，$\frac{1}{2}Q$ と等しくなるので、（⑥）$=\frac{1}{2}Q$，燃料噴射速度vを計算すると，

$v=\sqrt{\frac{Q}{m}}$ となる。

$Q=2.86\times10^5$J/mol，$m=1.8\times10^{-2}$kg/molとして，計算すると，$v=4.0\times10^3$m/sとなる。実測値は4.2×10^3m/sであり、まずまずの正確さである。

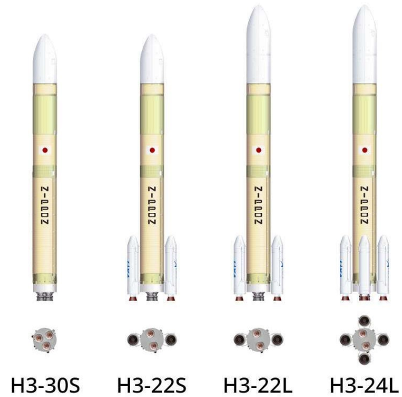
＜H3ロケットの仕様＞

第1段ロケット、第2段ロケットは水素燃料を用いた噴射である。表の単位は全長 L[m]、外径 D[m]、質量 M[$\times10^3$kg]、推進薬質量 m_0[$\times10^3$kg]、噴射速度[$\times10^3$m/s]、噴射量はエンジン1基あたりの噴射量[kg/s]である。H3ロケットの打ち上げ形態はブースターを付けずに主エンジン3基で打ち上げるH3－30、主エンジン2基と横に取り付けるブースターロケット2基のH3－22と主エンジン2基とブースターロケット4基のH3－24が計画されている。H3－30が最も安価でH3－24が最も打ち上げ費用が高い。

図4	全長L	外径D	質量M	推進薬質量m_0	噴射速度	噴射量ρ
第1段	37	5.2	242	217	4.2	350
ブースター	14.6	2.5	75.5	66.8	3.5	640
第2段	9.6	5.2	29	23	4.2	31

図5	主エンジン数	ブースター数
$H3-30S$	3	0
$H3-22S$	2	2
$H3-24L$	2	4

図6



＜ロケットの運動方程式＞

図7A

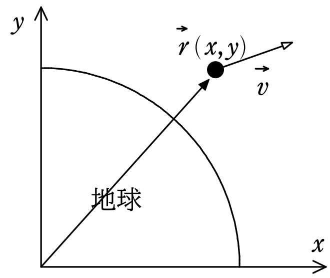


図7B

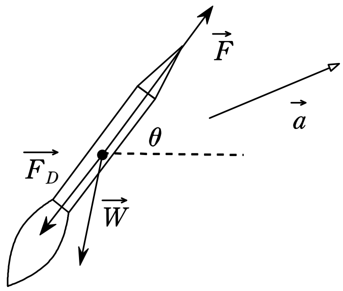


図7Aが半径 R_e の地球中心を原点とし、打ち上げ地点座標を $\vec{r_0}=(0,R_e)$ とする。時刻0にロケットを $\vec{r_0}$ の位置より鉛直上向きに発射する。時刻 t におけるロケットの位置ベクトルを $\vec{r}=(x,y)$、速度ベクトルを $\vec{v}=(v_x,v_y)$ 、加速度ベクトルを $\vec{a}=(a_x,a_y)$ とする。時刻 $t+\Delta t$ の位置、速度、加速度をそれぞれ $\vec{r}',\vec{v}',\vec{a}'$ とし、微少時間 Δt における加速度は一定であるとすると、$\vec{r}'=$（⑦[$\vec{r},\vec{v},\Delta t$]）、$\vec{v}'=$（⑧[$\vec{v},\vec{a},\Delta t$]）が成立する。

次にロケットの運動方程式を考えてみよう。燃料噴射による推進力を $\vec{F}$、空気抵抗力を $\vec{F_D}$、重力を $\vec{W}$ とし、ロケット上昇角を θ とすると、$\vec{F}=(F\cos\theta, F\sin\theta)$、

$\vec{F_D}=(-F_D\cos\theta,-F_D\sin\theta)$ とする。地球の質量を M_e、万有引力定数を G とすると、万有引力の大きさは（⑨[G,M,m,x,y]）。x,y 成分分解すると、

$$\vec{W}=-（⑨）\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$ と表されるものとする。

ロケットの運動方程式は　$M\vec{a}=$（⑩[$\vec{F},\vec{F_D},\vec{W}$]）　となる。空気抵抗の大きさ F_D は $F_D=\frac{1}{2}C_D dSV^2$ であらわされるとされている。ここで，V はロケットの速さで S は断面積で $S=\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$，$d$ は大気密度である。上空における大気密度は高度を h[m]として，

$d=1.3\times(0.865)^{-\frac{h}{1000}}$ [kg/m³]で近似される。C_D は空気抵抗係数と呼ばれている定数で物

体の形によって変化する定数である。ロケットの場合 C_D =0.50程度とされている。

図8

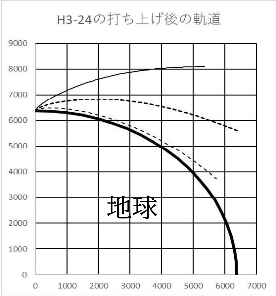
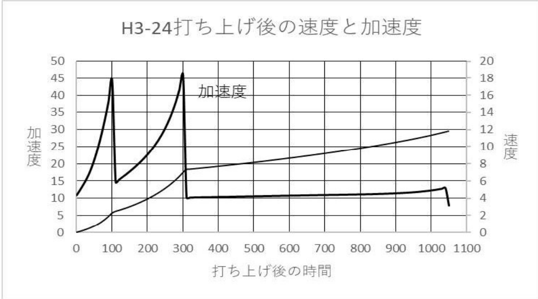


図9



これらのデータを基に方程式を立てて、打ち上げのシュミレーション計算をした。燃料がつきたところで、ブースターや第一段ロケットを切り離す。第二段ロケットの燃料がつきたところで衛星を放出する。図8は打ち上げ高度を変更したときのロケットの軌道を示し、図9は上昇中のロケットの加速度と速度を示したものである。ともにH3−24にて4tの衛星を打ち上げる計算している。

図9より、ブースター切り離しは100s後、第一段ロケット切り離しは（⑪[数値]）s後と推定される。図10は第二段ロケットの燃焼終了時の高度と放出した衛星の速さの関係を示し、横破線はその高度における脱出速度を示している。ともに4tの衛星を積んだ場合である。図10により打ち上げ時の高度を低くするほど、衛星の速度が上がることが分かる。

図10

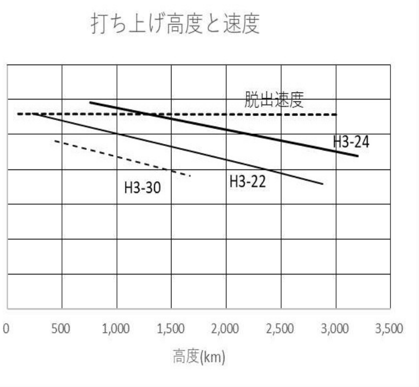


図11

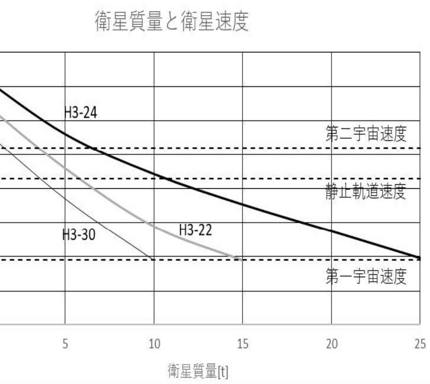


図11は打ち上げる衛星質量と衛星放出時の速度との関係を示したものである。横破線は第一宇宙速度、静止軌道に乗せる速度、第二宇宙速度を示している。打ち上げ費用も含めて考えると、10tの衛星を静止軌道に打ち上げるにはH3−24が最適であり、5tの衛星を静止軌道に乗せるのならH3−（⑫[数値]）が最適である。5tの人工衛星を低い地球周回軌道に乗せるのであればH3−30が最適となる。5tの火星探査機を打ち上げるにはH3−24が必要である。いずれも第三宇宙速度（16.7km/s）を出すことができないので、H3ロケットでは太陽系を脱出させることはできない。

G061H3ロケット発射

(解説)

① ロケットから見た燃料の相対速度は v なので、ロケットから見た運動量は1sあたり、ロケットの後方に ρv だけ増加している。よって、ロケットの運動量は前方に ρv 増加していることになる。

② 分子の並進運動エネルギーは分子の種類に関係なく $\frac{3}{2}nRT$ なので $\frac{3}{2}$

③ 並進運動エネルギーは x,y,z 三方向に均等なので、一方向当たり $\frac{1}{2}nRT$ となるので、

$\frac{1}{2}$

④ 回転運動エネルギーも一方向当たり $\frac{1}{2}nRT$ であり、三方向の回転があるので

$\frac{3}{2}nRT$ よって、$\frac{3}{2}$

⑤ 並進運動エネルギーは $\frac{3}{2}nRT$、回転運動エネルギーも $\frac{3}{2}nRT$ なので、内部エネルギーは足し算して $U=3nRT$。よって、$\Delta U=3nR\Delta T$ となり、定積モル比熱は $3R$ となる。
よって、3

⑥ 運動エネルギーなので、$\frac{1}{2}mv^2$

⑦ $\vec{v}$ は1s間の変位なので、Δt 間に $\vec{v}\Delta t$ 変化する。よって、$\vec{r}+\vec{v}\Delta t$

⑧ $\vec{a}$ は1s間の速度変化なので、Δt 間に $\vec{a}\Delta t$ 変化する。よって、$\vec{v}+\vec{a}\Delta t$

⑨ 万有引力は $\frac{GMm}{r^2}$ であり、三平方の定理より、$r^2=x^2+y^2$ なので、$\frac{GMm}{x^2+y^2}$ となる。

⑩ 力の和なので、$\vec{F}+\vec{F_D}+\vec{W}$

⑪ 加速度が急に変化しているところが第一段ロケット燃焼終了時である。300s

⑫ 図11より静止軌道にはH3−30、H3−22、H3−24のどれも到達可能であることが分かるが、H3−30は3t、H3−22は6t、H3−24は11tまでと読み取れる。H3−30は5tを打ち上げることができず、H3−22とH3−24はどちらも打ち上げ可能ではあるが、H3−22の方が安価に打ち上げられるので、H3−22が最適と考えられる。 22