# G060人工衛星こうのとり

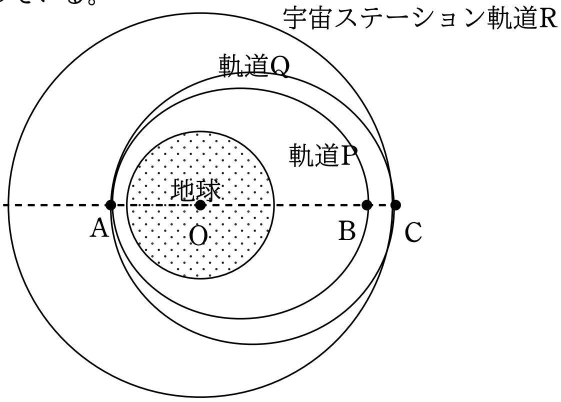
1

　国際宇宙ステーションに資材を送るための日本が開発した人工衛星を「こうのとり」とよんでいる。この「こうのとり」の軌道について考えてみよう。文章中（①）～（⑬）の[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

＜こうのとりの打ち上げ後の軌道＞

　国際宇宙ステーションは地球上空400kmのところで円軌道Rを描いている。「こうのとり」はロケットで打ち上げられた直後は近地点A（上空200km）、遠地点B（上空300km）の楕円軌道Pを回っている。

図1




　「こうのとり」はAで燃料噴射して軌道R上の遠地点Cとなる楕円軌道Qに移り、Cにお達したとき、燃料噴射をして軌道Rに乗るものとする。軌道Rに乗った後、宇宙ステーションに接近するわけであるが、宇宙ステーションに亀裂やひずみが入ると生命に関わるので、衝突の衝撃は0にする必要がある。そのために、「こうのとり」は宇宙ステーションと同じ軌道上で後方5kmの位置に到達させる。その後速度調整をして宇宙ステーションに接近させるのである。このときの接近過程について考えてみよう。

＜噴射による速度変化＞

　こうのとりの質量を $m$ 、噴射した燃料の質量を$\rho$とする。 $m >> \rho$であり、噴射によって「こうのとり」の質量は変化しないものとする。

図2A

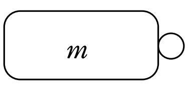
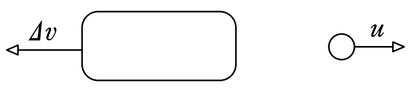



図2B




燃料噴射前の「こうのとり」の速度を基準とした相対速度で燃料噴射後の速度変化を考えてみよう。質量$\rho$の燃料を「こうのとり」から見た速さ $u$ で後方に噴射したとき、「こうのとり」が$\Delta v$だけ速くなったとする。この場合、 運動量保存則を用いることにより、$\Delta v$が求められる。それによると、

　$\Delta v =$ （①[ $m,\rho,u$ ]）　　　(i)

が成立する。「こうのとり」はこれを利用して、速度を変化させることにより、軌道を変

化させて国際宇宙ステーションにドッキングしている。

図3の$A_1$～$A_4$のように半径$r_0$の円軌道を速度$v_0$で回っている宇宙ステーションがある。万有引力定数を$G$、地球の質量を$M$、人工衛星の質量を$m$としたときの運動方程式は$m\times$（②[$r_0,v_0$]）＝（③[$G,M,m,r_0$]）となる。よって、 $r_0 {v_0}^2 = GM$ (ii)

となる。P点で速度$v$に減速すると、近地点Qでの地球中心Oからの距離が$r_1$、速度が$v_1$になったとすると、ケプラーの第二法則より

$r_0 v =$（④[$r_1,v_1$]） (iii)

エネルギー保存則は $\dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{GMm}{r_0} =$ （⑤[$G,M,m,r_1,v_1$]） (iv)。

(ii)(iii)(iv)を連立させて解くと

$$r_1 = \frac{v^2}{2{v_0}^2 - v^2} r_0 \qquad v_1 = \frac{2{v_0}^2 - v^2}{v} \qquad \text{(v)}$$

となる。

P点で円軌道速度$v_0$より$\varDelta v$だけ減速したとすると、$v = v_0 - \varDelta v$となるので、これを(v)に代入し、$\varDelta v \fallingdotseq 0$と考えられるので、$\varDelta v$に比べて$\varDelta v^2$は遙かに小さいことを考慮すると、

$$r_1 = \left(1 - 4\frac{\varDelta v}{v_0}\right) r_0 \qquad v_1 = v_0 + 3\varDelta v \text{ となる。} \qquad \text{(vi)}$$

図３の円軌道は宇宙ステーションの軌道Rで、楕円軌道は減速した後の「こうのとり」の軌道である。時刻0における宇宙ステーションの位置が$A_0$で、「こうのとり」の位置が$B_0$である。「こうのとり」の周期を$T$とするとき、宇宙ステーションの位置$A_0,A_1,A_2,A_3,A_4$、および「こうのとり」の位置$B_0,B_1,B_2,B_3,B_4$は時刻0, $\frac{1}{4}T$, $\frac{1}{2}T$, $\frac{3}{4}T$, $T$の位置を示している。なお、$B_0$と$B_4$と$A_4$は同じ位置である。

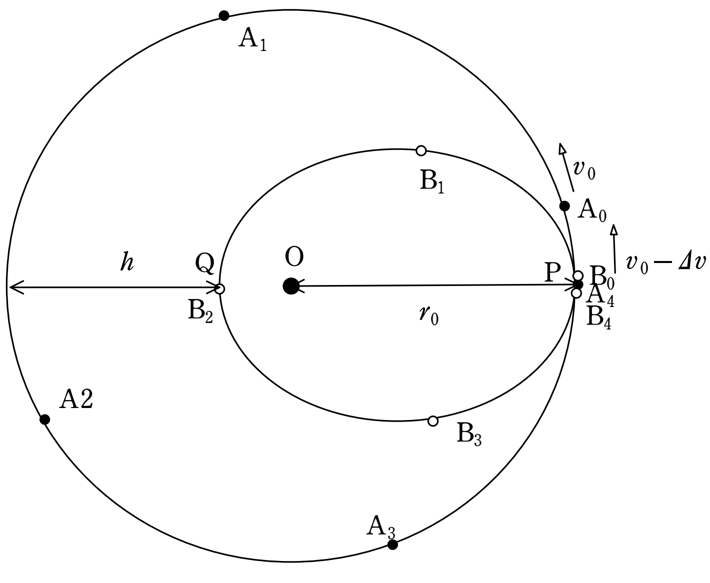



図3

# G060人工衛星こうのとり

P点では宇宙ステーションと「こうのとり」は同じ高さにあるが、近地点Qでは高さに差が生じている。この高度差を $h$ とすると、 $r_1 =$ （⑥[ $r_0,h$ ]） なので、(vi)より、

$h = 4\dfrac{\Delta v}{v_0}r_0$ となる。宇宙ステーションの周期を $T_0$ とすると、 円軌道なので、

$T_0 =$ （⑦[ $r_0,v_0$ ]） で表される。

「こうのとり」の軌道半長軸 $a$ は $a =$ （⑧[ $r_0,r_1$ ]） (vii)となる。ケプラーの第三法則より、 $\dfrac{a^3}{T^2} =$ （⑨[ $r_0,T_0$ ]） $= \dfrac{GM}{4\pi^2}$ が成立する。

(vi)(vii)を用いると、 $T = \left(1-3\dfrac{\Delta v}{v_0}\right)T_0$ となる。「こうのとり」が宇宙ステーションの軌道から外れて再び宇宙ステーションの軌道に戻るまでの時間は宇宙ステーションの周期 $T_0$ より $3\dfrac{\Delta v}{v_0}T_0$だけ短くなる。つまり、「こうのとり」が楕円軌道を1周したとき、 時間 $3\dfrac{\Delta v}{v_0}T_0 = 6\pi\dfrac{\Delta v}{{v_0}^2}r_0$ だけ先に進むことになる。速さ $v_0$ で移動しているので、この時間は距離に直して $\Delta x =$ （⑩[ $\Delta v,v_0,r_0$ ]） となる。

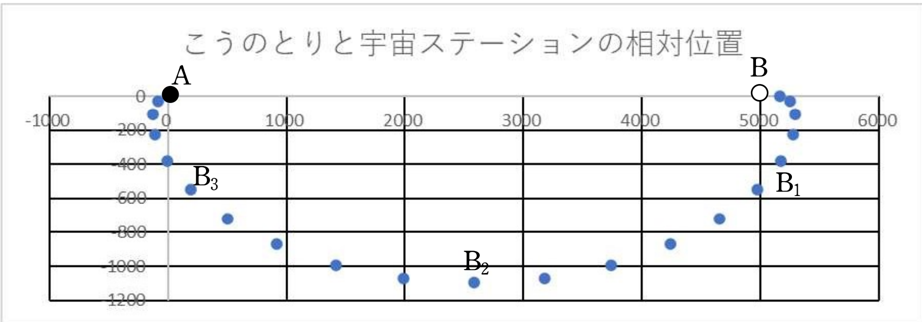



図４

図４は宇宙ステーションの位置をAとしたときの「こうのとり」の相対位置を示したものである。縦軸は宇宙ステーションに対する相対高度を意味し、水平方向は軌道上の相対位置を表している。縦横ともに単位はmである。Bは時刻0の位置であり、Aの後方（⑪[数値]）mの位置である。この状態から $\Delta v$ 減速した。この時刻を0とする。時刻 $\dfrac{1}{4}T$ で$B_1$に達し、時刻 $\dfrac{1}{2}T$で$B_2$に達する。この時、宇宙ステーションの軌道より（⑫[数値]）mほど下になっている。時刻 $\dfrac{3}{4}T$において、宇宙ステーションAのほぼ真下500mの位置$B_3$に達している。この後時刻 $T$ において宇宙ステーションに前方から接近しドッキングできる。

宇宙ステーションの $r_0 = 6.78\times10^6$m、 $v_0 = 7.67\times10^3$mを（⑩）に代入すると、 $\Delta x = 1.67\times10^4\,\Delta v$ [m]となる。「こうのとり」は最初宇宙ステーションの後方（⑪）mだったので、 $\Delta x =$ （⑪）mとなる。よって、 $\Delta v = 0.30$m/sと計算される。「こうのとり」

がこれだけ減速すれば、1周したとき、宇宙ステーションの位置に移動することができる。この時の相対速度が宇宙ステーションに対して−0.30m/sとなるので、燃料噴射して加速すれば、相対速度0となり、宇宙ステーションとドッキング可能となる。しかし、この状態では、燃料噴射ミスが起これば宇宙ステーションと「こうのとり」は衝突してしまう。そのため、宇宙ステーションの下方10mの位置で相対速度0になるように微調整する。

これを数値的に計算してみよう。「こうのとり」はヒドラジンと呼ばれている燃料を噴射する。この時の化学反応式は

$4NH_3(NH)NH_2+5N_2O_4 \rightarrow 4CO_2+12H_2O+8N_2$

この反応の反応温度は3300K、反応物の噴射速度は $u=5.6\times10^3$m/sである。「こうのとり」の質量 $m=1.65\times10^4$kgであるとすれば、0.30m/s減速するのに必要な燃料は(i)より、 $\rho=0.88$kgとなる。0.30m/s加速するのに必要な燃料も0.88kgとなる。

理論上はこのようにして「こうのとり」は宇宙ステーションにドッキングするのであるが、ドッキングの瞬間の相対速度は厳密に（⑬[数値]）にしなければならない。誤差が許されないのである。そのため、$B_3$の位置に来た時より宇宙ステーションとの相対位置を確認しながら速度の微調整をし、宇宙ステーションの下10mの位置で相対速度を（⑬）とする。そのあとは、宇宙ステーションの飛行士がアームを伸ばして「こうのとり」をつかみ、手作業でドッキングするというものである。

# G060人工衛星こうのとり

(解説)

① 燃料噴射により後方に $\rho u$ 運動量が増加するので、運動量保存則より前方にも同じ量だけ運動量が増加する必要がある。よって、 $m\varDelta v = \rho u$ となり、$\varDelta v = \dfrac{\rho u}{m}$

② 円運動の向心加速度なので、$\dfrac{{v_0}^2}{r_0}$

③ 万有引力なので、 $\dfrac{GMm}{{r_0}^2}$

④ ケプラーの第二法則より $r_1 v_1$

⑤ エネルギー保存則より $\dfrac{1}{2}m{v_1}^2 - \dfrac{GMm}{r_1}$

⑥ 半径 $r_0 = r_1 + h$ より $r_0 - h$

⑦ 周期は円周を速さで割ったもの $\dfrac{2\pi r_0}{v_0}$

⑧ 楕円の長径は $r_0 + r_1$ なので、半長径は $\dfrac{r_0 + r_1}{2}$

⑨ ケプラーの第三法則より $\dfrac{{r_0}^3}{{T_0}^2}$

⑩ 経過時間が $6\pi\dfrac{\varDelta v}{{v_0}^2}r_0$ で速さが $v_0$ なので、距離はその積となる $6\pi\dfrac{\varDelta v}{v_0}r_0$

⑪ グラフ図４より　AB間距離は　5000m

⑫ グラフ図４より　B2の位置は　1100m　下

⑬ ドッキングするときは相対速度0でなければ、宇宙ステーションが破損する。　0