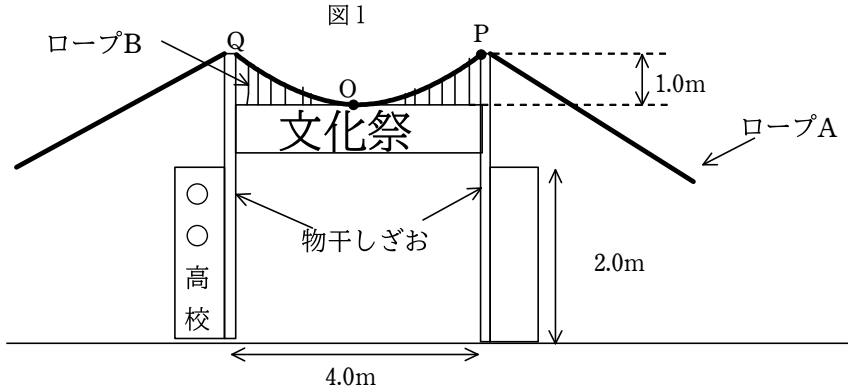


G059入場門と吊り橋

下は文化祭の看板の設計に関する文章である。文章中 ①～⑫の [] 内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。



ある高校の文化祭において校門に入場門を作ることにした。4.0m離れた2.0mの高さの校門の2本の門柱に3.5mの長さの物干しざおを各門柱に結び付け、質量42kg、長さ4.0mの文化祭の看板をロープAでつるす計画を立てた。看板の上端と物干しざおの上端との高低差が1.0mであるとして、ロープAの質量は無視できるものとし、重力加速度の大きさを 10m/s^2 とする。

図1のように看板の中央を点Oとし、右側の物干しざおの上端をPとした。看板に等間隔に21本のロープBをロープAに結びつけた。このロープBは左端から $B_0, B_1, B_2, \dots, B_{20}$ と名付けた。 B_0 及び B_{20} は看板の左右の端に結び付け、物干しざおに沿うように取り付けることにした。 B_{10} はちょうどOの位置になり、長さ3.0mで、看板とロープAを直接結び付けるようになった。ロープB同士の間隔は ①[数値] mで、21本のロープの張力がすべて等しくなるようにロープAの形状を計算することにした。ロープB1本あたりの張力は ②[数値] Nとなる。

まずは、ロープAの形状の計算をしよう。ロープ B_n の長さを $B(n)$ とすると、

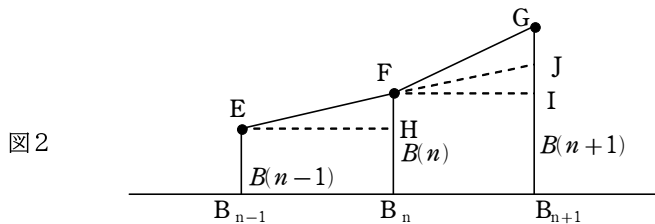


図2のようにロープAの連続した3つのロープ B_{n-1}, B_n, B_{n+1} との結び目をE,F,Gとする。それぞれのロープBの長さを $B(n-1), B(n), B(n+1)$ とする。ロープ B_n 上でのロープ B_{n-1} を同じ高さの点をH、ロープ B_{n+1} 上でロープ B_n と同じ高さの点をI、ロープEFの延長線との交点をJとする。

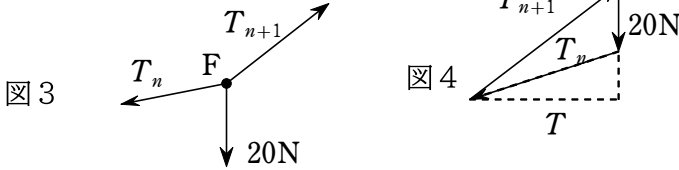
その結果、 $FH = JI = B(n) - B(n-1)$ であり、 $GI = B(n+1) - B(n)$ となる。よって、

$$GJ = GI - JI = B(n+1) - 2B(n) + B(n-1) \quad (i)$$

である。

G059入場門と吊り橋

ロープAのEF間の張力の大きさを T_n ，FG間の張力の大きさを T_{n+1} とすると，点Fにおける力のつり合いは図3のようになるが，これは， $\triangle FJG$ と相似形なので，図4のように変換できる。



張力の水平成分を T とすると，三角形の相似より $T : (2) = (1) : GJ$ となる。よって， $GJ = \frac{4}{T}$ となり，

$$B(n+1) - 2B(n) + B(n-1) = \frac{4}{T} \quad (ii)$$

が成立する。これは，隣接3項間の漸化式（数学Bで習う）である。 $B_{10} = 0$ ， $B_0 = B_{20} = (3)$ [数値]となる条件のもとで，この漸化式を解けばロープAの形状が判明する。この漸化式を解くと

$$B(n) = \frac{(n-10)^2}{100}$$

となり， n に関する二次式となる。

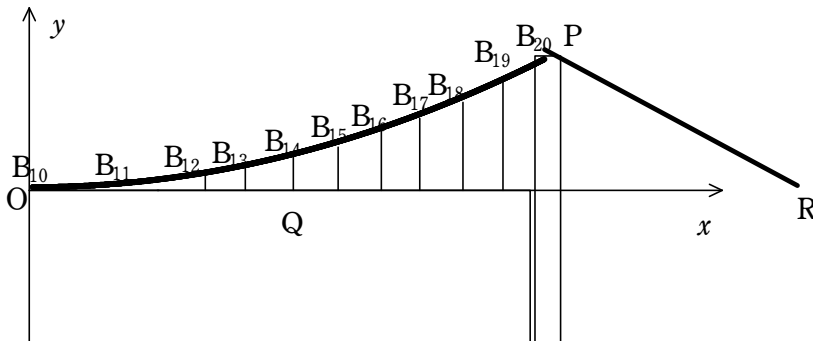


図5

この式を使えば B_0 から B_{20} のすべてのロープの長さが計算できる。

原点をOとし，水平方向右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸を考える。その様子を示したのが図5であり，点P付近を拡大したのが図6である。

$B_{19} = (4)$ [数値] m， $B_{20} = (3)$ mなので，物干し竿とロープAのなすを角度 θ とすると，三角関数のグラフ図7を用いて $\theta = (5)$ [数値]°であることが分かる。

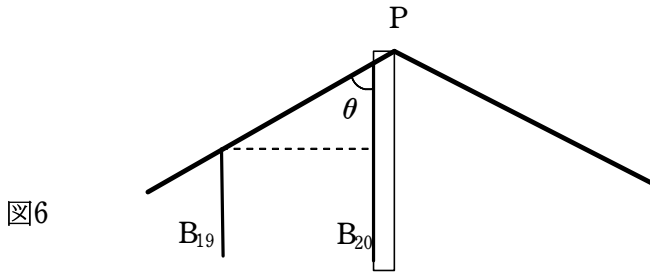


図6

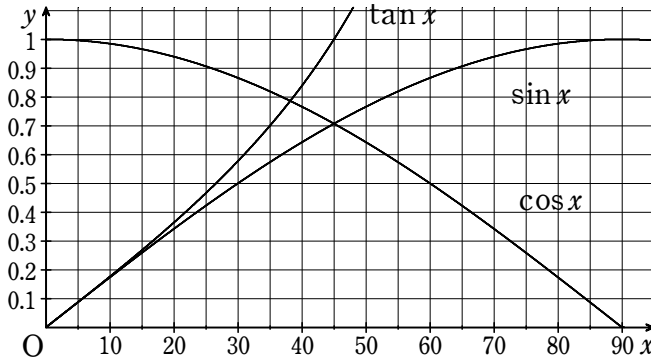


図7

次にP点に働いているロープAの張力の大きさを計算してみよう。ロープAはP点とQ点で看板の全重力を支えているので、P点ではその重力の半分を支えていると考えてよい。よって、P点にかかるロープAの張力の鉛直下向き成分は(⑥[数値])Nである。その結果、張力の水平方向成分は(⑦[数値])Nとなる。図4を用いることにより、ロープの張力の大きさは(⑧[数値])Nとなる。鉛直下向きのロープAが切れると、看板自体が落下するので、この張力の計算は重要である。P点の物干しぎおは鉛直方向の力には耐えられるが、水平方向の力には弱いので、P点には鉛直方向の力のみが働くようにしておく必要がある。

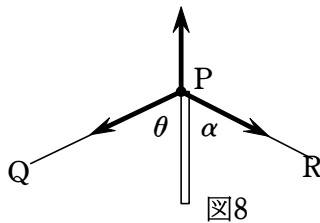


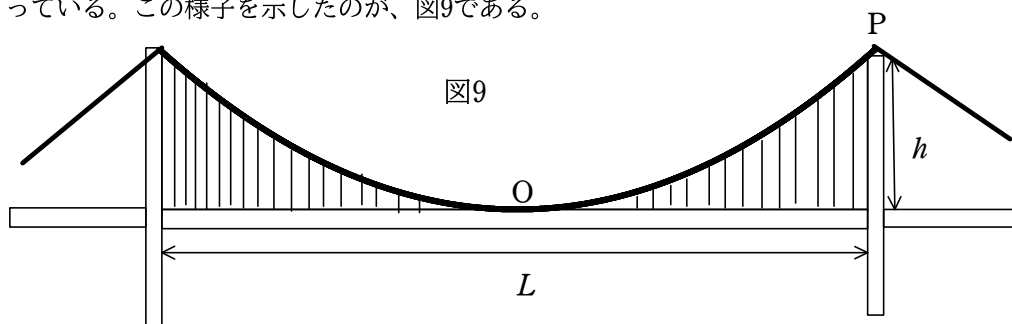
図8

物干しぎおに水平方向の力が働くと、物干しぎおが曲がってしまうので、物干しぎおには鉛直方向のみの力が働くようにしたい。図8のようにPRに働く張力とPQに働く張力は同じ大きさと考えられるので、ロープPRと物干し竿のなす角度 $\alpha =$ (⑤)°となる。物干しぎおがロープAから受ける力の大きさは張力の合力となるので、上向き(⑨[数値])Nとなる。これらの力に耐えられる物干しぎおを使わなければならない。

明石海峡大橋などの吊り橋のロープは入場門と同じ理論が成立するので、二次関数にな

G059入場門と吊り橋

っている。この様子を示したのが、図9である。



Oを原点とする2次関数を考える。二次の係数を a とおくとこの二次関数は

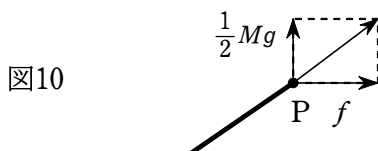
$$y = ax^2$$

となる。 $x = \frac{L}{2}$ のとき、 $y = h$ なので、 $a = (\textcircled{0}[h, L])$ となる。この二次関数を微分

すると $\frac{dy}{dx} = 2ax$ となるので、支柱の上端Pでのロープの傾きは $x = \frac{L}{2}$ を代入すると

$\frac{dy}{dx} = (\textcircled{1}[h, L])$ となる。支柱間の橋桁の質量を M とすると、このロープの鉛直方向

の力の大きさは重力加速度の大きさを g とすると、 $\frac{1}{2}Mg$ となる。Pに働く力の様子を
示したのが図10である。



Pがロープに加える水平方向の力を f とすると、 $\frac{dy}{dx} = (\textcircled{1}) = (\textcircled{2}[M, g, f])$ となる

ので、 $f = \frac{MgL}{8h}$ となる。よって、三平方の定理よりロープの張力の大きさ F を計算す

ると $F = \frac{\sqrt{L^2 + 4h^2}}{4h} Mg = \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{L}{h}\right)^2 + 4} Mg$ となる。明石海峡大橋では $L = 995\text{m}$ 、

$h = 216\text{m}$ 、 $M = 4.0 \times 10^7 \text{kg}$ なので、この数値を代入すると張力の大きさは $5.0 \times 10^7 \text{kg}$ となる。 h が大きくなればなるほど張力 F は小さくてすむので、長大な吊り橋ほど高い支柱が必要となる。

G059入場門と吊り橋

解説

- ① 4.0mを21本で支えるので、ロープとロープの間隔は20となり、 $\frac{4.0}{20} = 0.20\text{m}$
- ② 看板全体の重力の大きさは $42\text{kg} \times 10\text{m/s}^2 = 420\text{N}$ よって、ロープ1本あたり
 $\frac{420}{21} = 20\text{N}$
- ③ 図1より、1.0m
- ④ $B(n) = \frac{(n-10)^2}{100}$ に $n=19$ を 代入して $B_{19} = 0.81\text{m}$
- ⑤ B_{20} と B_{19} との長さの差は $1.0 - 0.81 = 0.19\text{m}$ ロープ間隔が 0.20m なので、
 $\tan \theta = \frac{0.20}{0.19} \approx 1.0$ グラフより $\theta = 45^\circ$
- ⑥ 図1のP、Qに働く張力の鉛直成分は合わせて看板を支えているので 420N となる。
よって、片方は半分となり 210N
- ⑦ $\tan \theta = 1.0$ なので、鉛直成分と水平成分は同じ よって、 210N
- ⑧ ロープの張力は水平成分と鉛直成分と水平成分の合成なので $210\sqrt{2} = 300\text{N}$
- ⑨ P点にかかるロープは左右対称になっているので、反対側からも同じ張力が働いている。よって、鉛直成分は2倍となり、 420N 、この力を支えているので 420N
- ⑩ $y = ax^2$ に $x = \frac{L}{2}$ 、 $y = h$ を代入すると $a = \frac{4h}{L^2}$
- ⑪ $\frac{dy}{dx} = 2ax$ に $a = \frac{4h}{L^2}$ 、 $x = \frac{L}{2}$ を代入すると $\frac{dy}{dx} = \frac{4h}{L}$
- ⑫ 図10より $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}Mg}{f} = \frac{Mg}{2f}$