G058野球ダイヤモンド一周

1

野球におけるダイヤモンドを1周するタイムに関する以下の文章の（①）～（⑬）の[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

図1

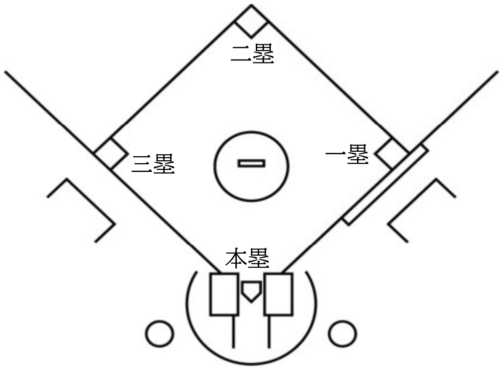


図1は野球におけるダイヤモンドを示している。ダイヤモンドとは本塁→一塁→二塁→三塁→本塁と構成されている部分である。このダイヤモンドを1周するタイムを物理的に考えてみよう。このダイヤモンドを一辺 $L=27.43\mathrm{m}$ とする。トップスピード v_0、ダッシュ時の加速度 a とし、ホームベースで静止していたランナーが加速度 a で加速し、トップスピードを保って、一塁に近づき、減速して塁を等速円運動で駆け抜ける。再び加速し、トップスピードに達し、同様に二塁、三塁と回り、ホームベースを走り抜ける。このとき等速円運動の回転半径を小さくすると距離は縮まるが、速度を落とす必要があり、トップスピードで塁を回ると回転半径が大きくなる。その点も考慮して最も速く一周する方法を考えてみよう。

＜ホームベースから一塁までの中点までの時間　T_A ＞

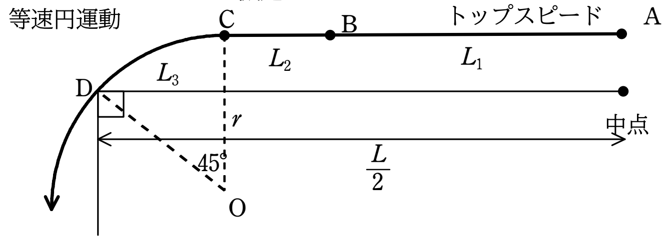
一塁までの中点までの距離は $\dfrac{L}{2}$ である。静止状態から加速度 a で v_0 に達するまでの時間は（①[a,v_0]）であり、ここまでの平均の速さは（②[v_0]）なので、トップスピードに達するまでに、（③[a,v_0]）の距離を移動している。残り、$\dfrac{L}{2}-$（③）をトップスピード v_0 で走るので、中点に達するまでの時間 T_A は

$$T_A=\frac{v_0}{2a}+\frac{L}{2v_0} \qquad \text{(i)}$$

となる。

＜中点からベースまでの時間　T_B　＞

図2



塁間の中点Aを通過したランナーは距離 L_1 をトップスピードで走り抜けBに達してから加速度 a で減速し、速さ v でCに達する。BC＝ L_2 とする。Cから回転半径 r の等速円運動に入りDでベースを通過する。CD間のライン上の距離を L_3 とする。AからDに達するまでの最短時間を求めてみよう。

図3

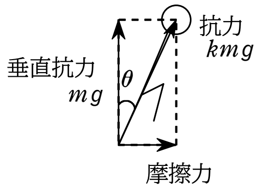


図3のように、ランナーが等速円運動をするとき、地面からの垂直抗力と摩擦力を受けるわけであるが、人の足が地面を蹴る力は片足で体重の k 倍を限度とする。ランナーの質量をm、重力加速度を g とすると、垂直抗力の大きさは mg で、抗力の最大値が kmg となる。よって、地面からの摩擦力の大きさは（④[k,m,g]） となり、 k の値は1.2程度とされているので、ここでは、 $k=1.20$ とする。その結果、摩擦力の大きさは0.663mgとなる。 図3の体の傾き角をθとすると、 $\cos\theta=$ （⑤[k]） となり、 k の値を代入すると$\theta=33.6°$となる。これ以上体を傾けると足がその抗力に耐えられなくなるのである。このとき、直線運動から等速円運動に切り替えるのに若干時間が必要となるが、その分回転距離が短くなるので、この時間は考えないものとする。

一定の速さ v で円運動するときの向心力が摩擦力となるので、向心加速度の大きさが（⑥[r,v]）となるので、運動方程式は　$m\times$（⑥） ＝（④） となり、これを解くと $r=\dfrac{v^2}{\sqrt{k^2-1}\,g}$ 。これは、数値的に　$r=0.154\,v^2$　(ii)　となる。これを用いると、 $L_3=r\cos 45°=0.109v^2$ 、CD間の通過時間 t_3 は $t_3=\dfrac{\pi r}{4v}=0.121v$ となる。

BC間は速さ v_0 から v に減速するので減速時間 t_2 は $t_2=$（⑦[v_0,v,a]） 、平均速度は（⑧[v_0,v]） なので、 $L_2=\dfrac{{v_0}^2-v^2}{2a}$ となる。その結果 $L_1=\dfrac{L}{2}-L_2-L_3$ 。これを v_0 で割ると L_1 の通過時間 t_1 が求められる。

AからDに達する時間 t は $t=t_1+t_2+t_3=\dfrac{L}{2v_0}-\dfrac{{v_0}^2-v^2}{2av_0}-\dfrac{0.109}{v_0}v^2+\dfrac{v_0-v}{a}+0.121v$ となる。これを二次関数の標準形に直すと

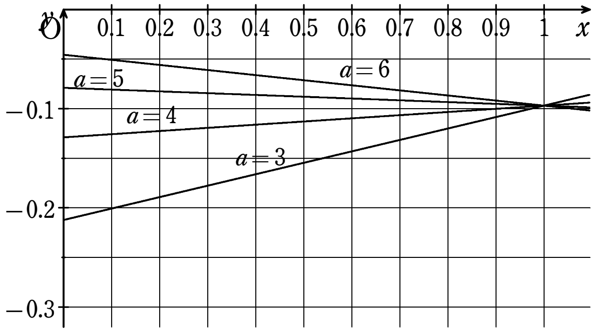
$$t=\frac{1}{v_0}\left(\frac{1}{2a}-0.109\right)v^2+\left(0.121-\frac{1}{a}\right)v+\frac{L}{2v_0}+\frac{v_0}{2a}\qquad\text{(iii)}$$

これを微分し、 $\dfrac{dt}{dv}=y$ 、$\dfrac{v}{v_0}=x$ とおき、式を簡単にすると、

$$y=-0.218\,x+0.121+\frac{1}{a}(x-1)$$

様々な a の値に対して一次関数となる。グラフに書いてみると図4のようになる。

図4



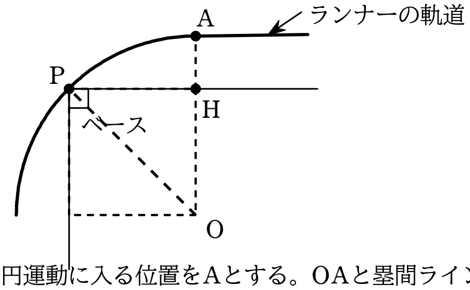
$x=0$ で $y=0$となるのは、 $a=8.26$ である。よって、 $a<8.26$ のとき、$0\leqq x\leqq 1$の範囲で $y<0$　となる。 yはtのグラフの傾きを表しているので、 tは$0\leqq x\leqq 1$の範囲で単調減少となる。 $a\leqq 5$程度なので、 tが最小となるのは$x=1$ のとき、すなわち、 $v=$（⑨[v_0]）　の時である。これは、トップスピードのまま、減速することなく等速円運動に入ることを意味している。 これを(iii)に代入して最短時間 T_B を計算すると

$$T_B = 0.012v_0 + \frac{13.7}{v_0} \quad \text{(iv)}$$

となる。

ここで、トップスピードが10m/sとして、速く等速円運動する秘訣を考えてみよう。 $r=0.154\,v^2$ より、 $r=15.4$mとなり、回転半径15.4mの等速円運動となる。周回速度は10m/sである。

図5



回転中心をOとし、等速円運動に入る位置をAとする。OAと塁間ラインとの交点をHとする。 ∠AOP=45°であり、PH＝（⑩[r]）＝10.9m、AH＝$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)r$ =4.51mとなる。ラインより4.51m離れて走り、一塁ベースのライン上で10.9m手前から等速円運動に入ると最も速く回れることになる。

＜走り抜け時間　T_C　＞

二塁打･三塁打の時はそのベース上で静止する必要があるが、本塁は走り抜け可能である。静止する場合は速くベースにタッチするにはヘッドスライディングが有効であるが、この時間と走り抜け時間はほぼ同じなので、等しいと考えて計算する。

塁間距離の半分 $\frac{L}{2}$ をトップスピード v_0 で走り抜ける時間 T_C は　$T_C = \frac{L}{2v_0} = \frac{13.7}{v_0}$ となる。

＜ダイヤモンド1周にかかる時間＞

本塁一塁間のライン上の中点から一塁にかかる時間と一塁から一二塁間の中点にかかる時間は同じである。同様にして二塁･三塁と計算すると、よって、ダイヤモンド一周時間 T_4 は

$$T_4 = T_A + 6T_B + T_C = \frac{v_0}{2a} + 0.072v_0 + \frac{110}{v_0}$$

となる。同様にして一塁を走り抜ける時間 T_1、二塁打の最短時間 T_2、三塁打の最短時間 T_3 も求めることができる。

$$T_1 = T_A + T_C = \frac{v_0}{2a} + \frac{27.4}{v_0}$$

$$T_2 = \text{（⑪}[T_A, T_B, T_C]\text{）} = \frac{v_0}{2a} + 0.024v_0 + \frac{54.8}{v_0}$$

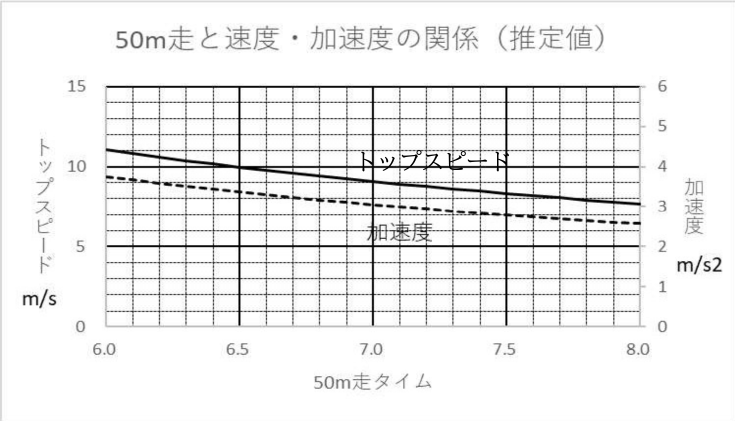
$$T_3 = \text{（⑫}[T_A, T_B, T_C]\text{）} = \frac{v_0}{2a} + 0.048v_0 + \frac{82.2}{v_0}$$

G058野球ダイヤモンド一周

＜50m走タイムと a, v_0 の関係＞

50m走のタイムとその選手のトップスピード･加速度には大体図6のような関係があると推定されている。

図6



この推定値を元にダイヤモンド一週時間･三塁までの到達時間･二塁までの到達時間･一塁までの到達時間を計算したのが図7である。

図7

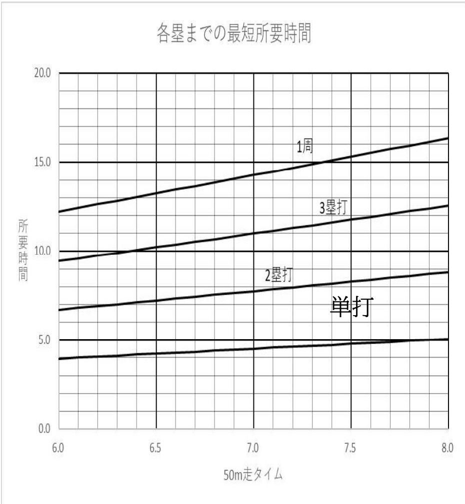
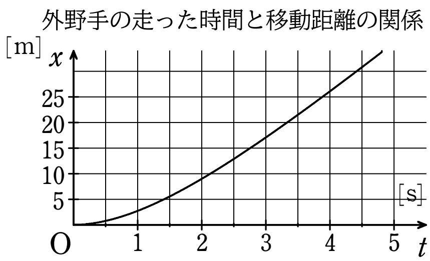


図8



＜ランニングホームランの可能性＞

バッターが120m先の最も深いところにヒットを打った。バッターが打つと同時に定位置にいた外野手が30m先の落下点まで全速力で走った。50m走6.5sの人の走り始めてからの時間と走行距離の関係が図8である。落下点に達するのが打ってから4.5s後となる。落下点到達後ボールを拾って投げるまでに1.5sかかるとする。この位置から二塁まで81m、三塁まで102m、本塁まで120mである。外野手が速度の水平方向成分30m/sでボールを投げると、ボールの飛行時間は二塁までが2.7s、三塁までが3.4s、本塁までが4.0sとなる。一人の中継が入るとすると、中継時間0.9sを追加することになる。その結果打ったボールが二塁に戻るまで9.6s、三塁に戻ってくるまで10.3s、本塁に戻るまで10.9sとなる。50mタイム7.0sのランナーは二塁打までとなるが、50m走タイムが（⑬[数値]）s以下のランナーなら三塁打にできる。ダイヤモンド一周は50m走タイム6.0sのランナーでも12sかかるので、外野手がボールを取るのにもたつかない限りランニングホームランは不可能である。

G058野球ダイヤモンド一周

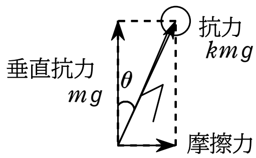
(解説)

① 加速度は1s当たりの速度変化なので、加速時間は $\dfrac{v_0}{a}$

② 平均速度は最初と最後を足して2で割ればよいので、 $\dfrac{v_0}{2}$

③ 移動距離は平均速度×経過時間なので、 $\dfrac{v_0}{2}\times\dfrac{v_0}{a}=\dfrac{{v_0}^2}{2a}$

＜別解＞ 公式 $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ に代入してもよい。



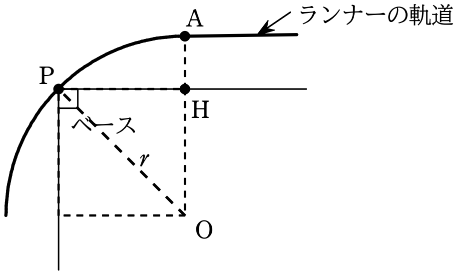
④ 三平方の定理より 摩擦力²＝抗力²－垂直抗力²となる。
よって、摩擦力＝ $\sqrt{(kmg)^2-(mg)^2}=\sqrt{k^2-1}\,mg$

⑤ $\cos\theta=\dfrac{1}{k}$

⑥ 向心加速度なので、 $\dfrac{v^2}{r}$

⑦ 減速時間なので、速度差をかかった時間で割ればよい。$\dfrac{v_0-v}{a}$

⑧ 平均速度は最初と最後を足して2で割ればよいので、$\dfrac{v_0+v}{2}$



⑨ $x=\dfrac{v}{v_0}=1$ なので、 $v=v_0$

⑩ 図より $\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$

（∠POH＝45°）

⑪ 2塁打はホームから1塁までの中点まで T_A
中点から1塁まで T_B
1塁から2塁の中点まで T_B
中点から2塁まで T_C なので、 $T_A+2T_B+T_C$

⑫ 3塁打の場合⑪に12塁間の中点から2塁までの時間 T_B と2塁から23塁の中点までの時間 T_B を加えればよい。 $T_A+4T_B+T_C$

⑬ ボールが3塁まで戻ってくるのが10.3sである。図７より50m走6.6sのランナーが10.3sほどで3塁に達することができるので 6.6s