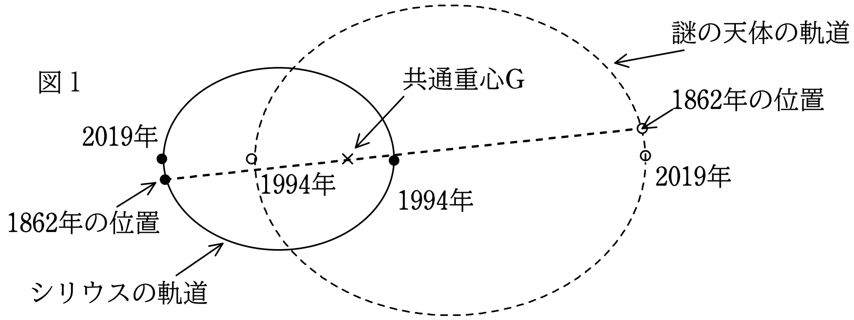
G056シリウス伴星

$\boxed{1}$

全天一明るい恒星はおおいぬ座のシリウスと呼ばれている恒星である。シリウスには謎がある。その謎について考えた以下の文章の（①）～（⑫）の[　]内に文字が示されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

シリウスは-1.4等星で全天一明るい。太陽系より8.7光年先にあり、質量は太陽の1.98倍、本当の明るさは太陽の25.4倍、半径は太陽の1.71倍と測定されている。

図１



1844年にドイツの天文学者ベッセルがシリウスを観察し、ふらついていることを発見した。ふらつきを分析すると、図１のようにシリウスが共通重心Gの周りを楕円軌道を描いて公転していることが判明した。その軌道は最も公転速度が速いのが1894年で、遅くなったのが1919年である。この楕円軌道の軌道半長径は19.6AUと測定された。1AUは地球太陽間の距離を表している。公転周期は50.1年である。

シリウスが楕円軌道を描いて公転しているということは、その相手になる天体が存在するはずであるが、その謎の天体はしばらく見つからなかった。太陽質量を M_0[kg]とするときシリウスの質量を k_1M_0、謎の天体の質量を k_2M_0 とすると、合計質量は$(k_a+k_2)M_0$となる。地球の公転周期を T_0[s]とすると、シリウスの公転周期は $50.1T_0$、太陽地球間の距離を a_0[m]とすると、シリウスの軌道半長径は19.6 a_0 となる。ケプラーの第三法則より、$\dfrac{(19.6a_0)^3}{(50.1T_0)^2}=\dfrac{G(k_1+k_2)M_0}{4\pi^2}$ となり、太陽と地球の関係に対してケプラーの第三法則を使うと $\dfrac{{a_0}^3}{{T_0}^2}=$（①[$G,M_0$]） が成立するので、$k_1+k_2=\dfrac{19.6^3}{50.1^2}=3.00$となる。

シリウスの位置をA、謎の天体の位置をBとすると、共通重心までの距離の比は一定で、$\dfrac{BG}{AG}=2.06$となるので、（②[k_1,k_2]） $=2.06$となる。k_1,k_2に関するこれらの方程式を解くと $k_1=2.02$,$k_2=0.98$となる。この結果，太陽とほぼ等しい質量をもつ謎の天体が存在しているということになる。

この謎の天体の推定位置は図1の通りである。 1862年にアメリカのクラークによって推定される位置に暗い星が発見された。この星は「シリウス伴星」と呼ばれることになった。明るさは11.3等と大変暗く、半径が地球の1.74倍と計算された。観測結果によりばらつきがあるが、以降この値を採用する。

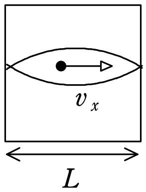
G056シリウス伴星

質量が太陽ほどあるのに半径が地球程度なので、密度が異常に高いという結果が得られる。計算すると、3.6×10^8kg/m^3＝360kg/cm^{3}であり、1cm^{3}が360kgもの質量になるのである。表面の重力加速度 g の大きさもすさまじく、 g＝（③[G,M,R]）＝1.1×10^6m/s^2＝1100km/s^{2}となり、1s加速すると、1100km/sの速さになる加速度である。重力がすさまじく1gの物質が地球上で110kgの物体の重力に該当する。このような天体を白色矮星と呼んでおり、恒星の死骸とされている。このような天体が実在するのかどうかを考えてみよう。この天体の原子はすべてプラズマ状態になっていると推定されるのですべての電子は自由電子となっている。よって、自由電子の動きを調べてみることにする。

＜白色矮星の状態方程式＞

簡単のために電子1個の占める領域が1辺 L の立方体であるとし、 x 方向の電子波の波長を λ_x、速さを v_x、プランク定数を h とし、両端が固定端反射の基本振動をしていると仮定すると、

図2



λ_x＝（④[h,m,v_x]）　　L＝（⑤[λ_x]）　より、　$v_x=\dfrac{h}{2mL}$

運動エネルギーは　E_x＝（⑥[m,v_x]）$=\dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{h}{2mL}\right)^2=\dfrac{h^2}{8mL^2}$

この式の右辺に x 方向の文字が含まれていないために，E_x,E_y,E_zはすべて等しくなる。このエネルギーをEとする。外力を加えて Lを $\varDelta L$ 減少させせたときのエネルギー変化$\varDelta E$は、E を L で微分することによって求められ、　$\dfrac{dE}{dL}=-\dfrac{h^2}{4mL^3}$ より、

$$\varDelta E=-\frac{dE}{dL}\varDelta L=\frac{h^2}{4mL^3}\varDelta L$$

となる。仕事した分だけ内部エネルギーが上昇するので、$\varDelta E$は圧力がした仕事と等しい。この圧力を P と置くと、この立方体の断面積が L^2 であることを考えると、仕事は（⑦[$P,L,\varDelta L$]）で表される。

よって、　$\varDelta E$＝（⑦）$=\dfrac{h^2}{4mL^3}\varDelta L$　　(i)　　が成立する。

恒星内では温度が高いために原子内の全電子は原子核の束縛を離れた自由電子となっている。この状態をプラズマ状態と呼んでいる。原子核と全自由電子の原子量の平均を平均分子量と言い、その値をμとする。例えば C原子は原子量12の原子核1個と原子量0の自由電子6個の合計7個の粒子となっているので、$\mu=\dfrac{12}{7}$＝1.71となる。同様にして酸素原子は原子番号8、原子量16なので、μ＝（⑧[数値]）となる。 原子量1の原子の質量を m_u、密度をρとすると、この領域は電子が１個なので、質量はρL^3＝（⑨[μ,m_u]） となる。（μは平均なので電子１個あたりの質量と考えて良い。）この式より(i)の L を消去すると

$$P = \frac{h^2}{12m}\left(\frac{\rho}{\mu m_u}\right)^{\frac{5}{3}}$$

となる。定数部分を K と置くと、

$$P = K\left(\frac{\rho}{\mu}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad \text{(ii)}$$

と置ける。$h = 6.63\times10^{-23}$Js、$m = 9.11\times10^{-31}$kg、$m_u = 1.66\times10^{-27}$kgを用いると $K = 1.73\times10^{7}$となるが、実際は様々な電子の状態が存在しているので、それを考慮して正確な計算をすると $K = 1.00\times10^{7}$となることが知られている。

天体中心からの半径 r の位置の圧力を $P(r)$ 、密度を $\rho(r)$ とおくと、(ii)より

$$P(r) = K\left(\frac{\rho(r)}{\mu}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad K = 1.00\times10^{7} \qquad \text{(iii)}$$

これが白色矮星を構成している物質の状態方程式である。

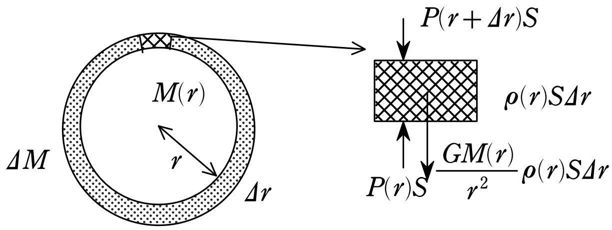
＜質量保存の式＞

半径rの球内部の質量を $M(r)$ とし、その外側の厚さ$\varDelta r$の球殻の質量を$\varDelta M$とする。図3のように、 この球殻の体積は表面積×厚さなので、これに密度 $\rho(r)$ をかければ $\varDelta M$ となる。

$\varDelta M =$ （⑩[$r,\rho(r),\varDelta r$]）であり、 $\varDelta M = M(r+\varDelta r) - M(r)$ とおけるので、

$M(r+\varDelta r) = M(r) +$ （⑩）　　(iv)

図3



＜圧力平衡の式＞

半径 r の位置の断面積 S 部分の質量は$\rho(r)S\varDelta r$ なので、この微小部分が受ける万有引力の大きさは、（⑪[$G,M(r),r$]）$\times\rho(r)S\varDelta r$。下面の圧力を $P(r)$ とすると、下からの力は $P(r)S$、上面から受ける力は $P(r+\varDelta r)S$ と表されるので、力のつり合いの式は、

$P(r+\varDelta r)S +$（⑪）$\times\rho(r)S\varDelta r = P(r)S$　となる。簡単にすると、

$P(r+\varDelta r) = P(r) -$（⑪）$\times\rho(r)\varDelta r$　　(v)

これが圧力平衡の式である。

＜内部構造計算＞

μと中心密度 $\rho(0)$ を仮定し、 $\varDelta r = 1.00\times10^{5}$mとして、その区間内は $P(r)$ 、$\rho(r)$は 一定であるとして(iii),(iv),(v)を用いて、$r=0$から $r=\varDelta r$,$2\varDelta r$・・・ と 順次r が大きい位置の $P(r)$,$\rho(r)$,$M(r)$を順次計算する。r が大きくなるにつれ $P(r)$ 、$\rho(r)$ は次第に小さくなり、$M(r)$ は次第に大きくなる。そして， $\rho(r) = 0$となった r がその星の半径 R ，$M(R)$ がその天体の質量を意味することになる。この手法で白色矮星のRと$M(R)$を求め，シリウス

伴星の測定された R と $M(R)$ に一致するμと$\rho(0)$ を求めてみることにする。

シリウス伴星は白色矮星であり、恒星の死骸である。恒星は中心核の核融合によって、H→He→C→O→Neと元素が順次合成されていき、Feが合成されると核融合では熱が出なくなるので、恒星が崩壊し、超新星爆発を起こす。白色矮星は超新星爆発を起こすまで核融合を起こせず、途中で反応が止まった状態と考えられる。まずすべて炭素Cでできていると仮定し、$\mu=1.71$として、様々な$\rho(0)$に関して R と $M(R)$ の関係を求め、グラフCとした。次にすべてO（$\mu=$（⑧））であると仮定して、同様にR と $M(R)$ の関係を求めて、グラフOとした。そして、シリウス伴星の観測データを重ねてみたのが図4である。

図4

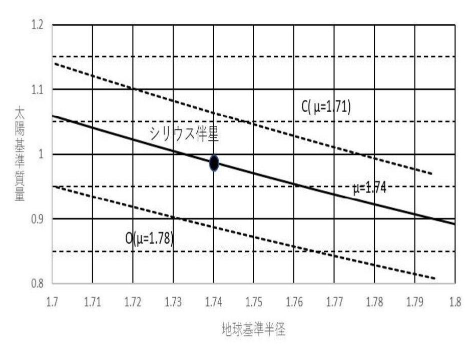


図5

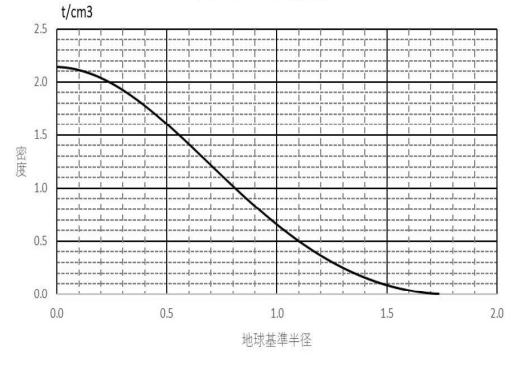


図4の縦軸は太陽質量＝1とした白色矮星の質量で、横軸は地球半径＝1とした白色矮星の半径である。シリウス伴星の位置はグラフCとグラフOの中間に存在する。シリウス伴星の位置と重なるようにμを推定すると、$\mu=1.74$としたときにシリウス伴星が重なった。シリウス伴星の構成元素がCとOのみであると仮定すると、Cの存在比が x のとき、Oの存在比は（⑫[x]）となるので、$1.71x+$（⑧）×（⑫）＝1.74が成立する。

この方程式を解くと $x=0.60$となり、シリウス伴星構成物質はCが60%，Oが40%の混合物となる。その他の元素も存在していると思われるが、主成分は炭素Cと酸素Oで構成されている白色矮星であることが推定される。$\mu=1.74$とし、中心密度$\rho(0)=2.1\times10^3$kg/cm^{3}として内部構造を計算すると、シリウス伴星の測定された半径と質量に一致した。このときの内部状況が図5である。

このように白色矮星の存在は理論的に証明された。太陽も100億年後は地球の2倍程度の大きさの白色矮星になると考えられている。

このシリウス伴星の半径は最近の干渉計による測定で地球の0.98倍の大きさであることがわかった。シリウス伴星の密度はこの計算よりさらに高密度になる。図4によると、平均分子量が2.0を超え、最終段階のFeの合成まで進んで、超新星爆発寸前までいった白色矮星であることがわかる。この場合、高精度な計算は、電子の運動に関して相対性理論を考慮する必要が出てくるので、ここでは扱わない。

G056シリウス伴星

(解説)

① ケプラー第三法則より $\dfrac{GM_0}{4\pi^2}$

② 重心までの距離比は質量の逆比なので、$\dfrac{BG}{AG}=\dfrac{k_1}{k_2}$

③ 万有引力と重力は等しいので、$mg=\dfrac{GMm}{R^2}$ よって、$g=\dfrac{GM}{R^2}$

④ 物質波の波長なので、$\dfrac{h}{mv_x}$

⑤ 定常波の 節から節までの距離なので、$\dfrac{\lambda_x}{2}$

⑥ 運動エネルギーなので、$\dfrac{1}{2}mv_x{}^2$

⑦ 仕事＝力×距離　で力＝圧力×面積　距離　ΔLなので、$PL^2\Delta L$

⑧ O原子は　原子量16で、原子番号が8なので、原子核＋自由電子数＝9となる。

よって、$\mu=\dfrac{16}{9}$（1.78）

⑨ 原子量1の原子質量を m_u としているので、平均分子量μでは、μm_u

⑩ 半径 r 厚さ Δr の球殻の質量なので、表面積×密度×厚さで求められる。

$4\pi r^2\rho(r)\Delta r$

⑪ 万有引力＝質量×重力加速度　で質量は与えられているので⑪は重力加速度に該当する $\dfrac{GM(r)}{r^2}$

⑫ Cの存在比が x なので、それ以外のOは $(1-x)$