G052ハンドボール投げ

1

　ハンドボール投げをするとき、どの角度に投げるのが最も遠くに投げられるのかを物理的に論じた文章中の（①）～（⑬）において[　]内に文字が指示している場合はその文字を用いた式を，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

　空気抵抗を考慮した飛距離を考えることにする。運動物体の空気抵抗力 F_D は，物体の速さを v ，断面積を S ，空気密度を d とすると，形状による定数（空気抗力係数という）を C_D とおくと，

$$F_D = \frac{1}{2} C_D d S v^2 \quad \text{(i)}$$

で表されることが知られている。

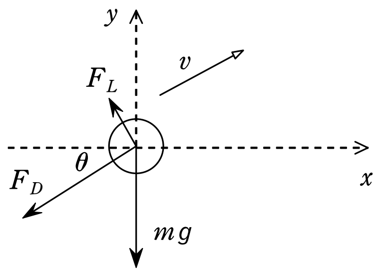
　また、ボールの回転により、進行方向と直角方向に揚力 F_L が働く。ボールの回転数を f 、比例定数を C_L とすると、

$$F_L = \frac{1}{2} C_L d S f v \qquad \text{(ii)}$$

であることが知られている。 実験により C_D ＝0.40、 C_L ＝0.16程度と推定されている。ハンドボールの場合， d ＝1.20kg/m³， S ＝0.024m²である。なおボールの質量 m＝0.35kg，重力加速度 g ＝9.8m/s²とする。

　水平方向を x ，鉛直方向を y とした平面を考える。ボールが x 軸より上方に角度 θ 方向に速さ v で運動している状態を示したのが図１である。

図１



　空中を飛んでいるボールには図１のように mg , F_D , F_L の力が働いている。 ボールの加速度の x 成分を a_x 、 y 成分を a_y とするときに運動方程式は

$$ma_x = （①[F_D,\theta]） + （②[F_L,\theta]） \qquad \text{(iii}-1\text{)}$$

$$ma_y = （③[F_D,\theta]） + （④[F_L,\theta]） + （⑤[m,g]） \qquad \text{(iii}-2\text{)}$$

となる。 $\vec{a} = (a_x, a_y)$ とする。速度ベクトル $\vec{v} = (v_x, v_y)$ 、等級の瞬間の足下の位置を原点とするボールの変位を $\vec{x} = (x, y)$ とする。時刻0における変位 $\vec{x_0}$ を $\vec{x_0} = (0, h)$ 、初速度 $\vec{v_0}$ を $\vec{v_0} = (v_0\cos\theta_0, v_0\sin\theta_0)$ とする。θ_0 は投げ上げ角度である。微少時間 Δt 間の $\vec{a}$ は一定であるとし、 Δt 後の速度 $\vec{v'}$ 、変位 $\vec{x'}$ を求めると、

$$\vec{v'} = \vec{v} + （⑥[\vec{a}, \Delta t]） 、 \vec{x'} = \vec{x} + （⑦[\vec{v}, \Delta t]） \qquad \text{(iv)}$$

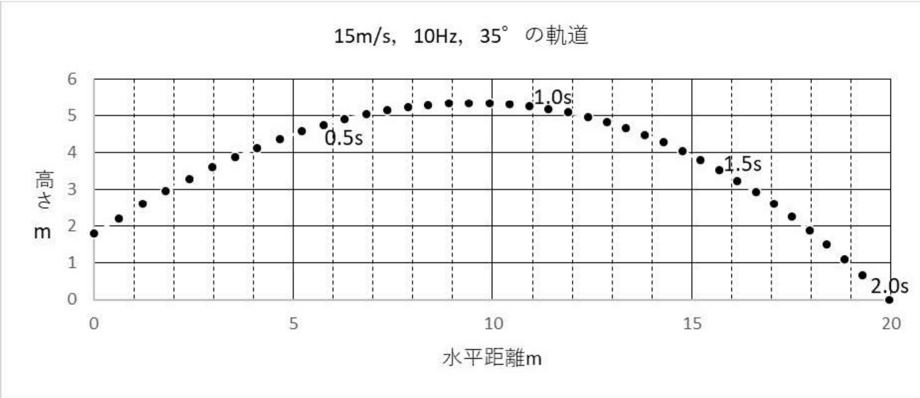
　と表すことができる。また、θ の定義より $\tan\theta$ ＝（⑧$[v_x, v_y]$）　(v)となる。

G052ハンドボール投げ

時刻0の初期値 $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{v_0}$ を用いて(v)より、θを求め，次に(i),(ii)より， F_D,F_Lを求める。それらの値を用いて運動方程式(iii)より $\vec{a}$ を求める。 $\Delta t = 0.01$sとし、(iv)より、 $\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{x'}$ を求めることができる。この $\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{x'}$ を $\vec{v}, \vec{x}$として、初期値と同様の計算をしてさらに Δt 後の $\vec{v}, \vec{x}$ 求める。このようにして $\vec{v}, \vec{x}$ を逐次計算することによって、各時刻のボールの位置を計算することができる。このような計算法をシミュレーション計算という。

$v_0 = 15$m/s， $h = 1.84$m， $f = 10$Hzの場合の0.05sごとの位置を計算し，その結果を示したのが図２である。これによると，投げられたハンドボールは，0.85s後に最高点5.5mの高さを通過し，2.0s後に20m先に落下することになる。

図２



次に，真空中と空気中の無回転の場合と，10Hzで回転している場合の飛距離を比較してみよう。$v_0 = 15$m/s， $h = 1.84$mとして，それぞれの場合の投射角度が30°～45°の範囲での飛距離を計算したものが図３のグラフである。ボールの回転速度の測定は難しいが，手首のスナップの速さから推定して10Hz程度と考えられる。以降は回転速度を10Hzとして考えてみよう。

図３

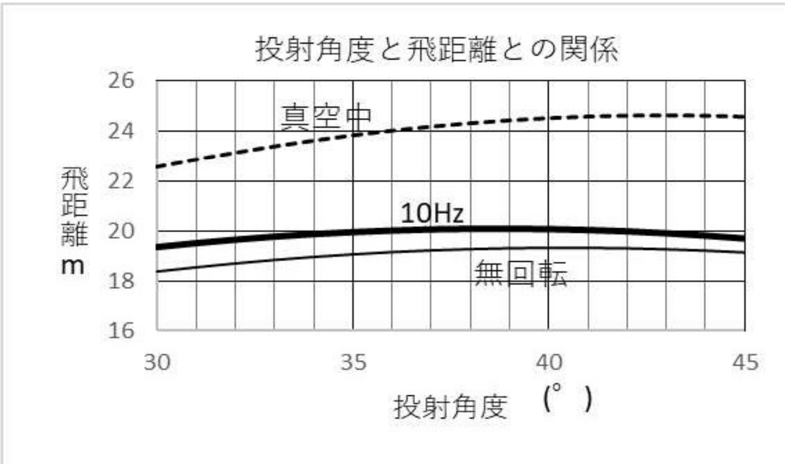


図３を見ることにより，35度方向に投げた時，無回転のボールは真空中より（⑨[数値]）m程飛距離が短くなり，10Hzで回転させたときは無回転より（⑩[数値]）m程距離が延びることが分かる。

次に初速度を色々と変えた場合の最も遠くに投げられる角度を計算したのが図4である。

図４

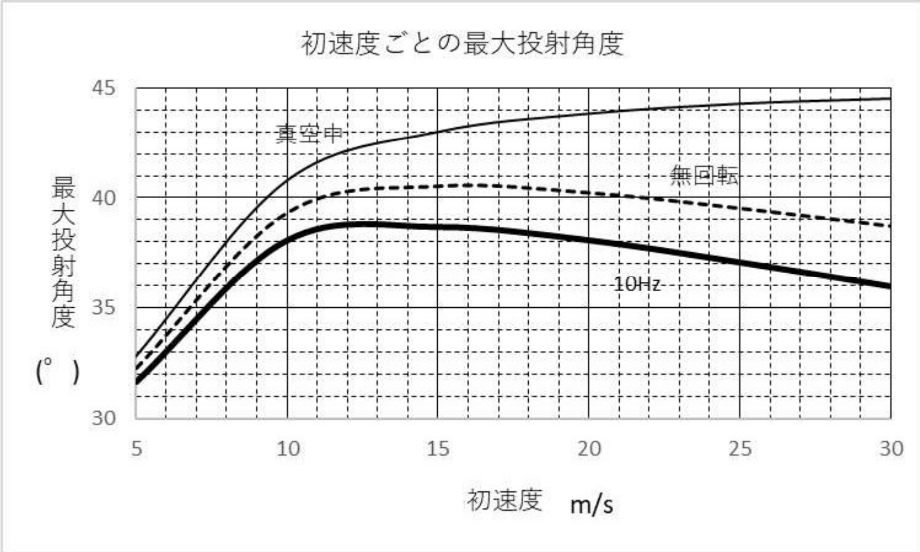
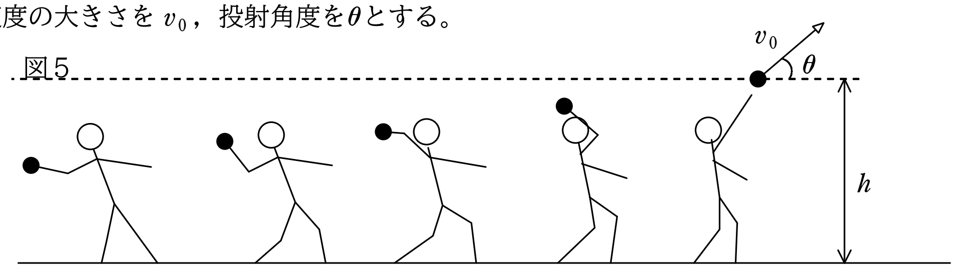


図４を見ると10Hzで回転させ，20m/sで投げた時，（⑪[数値]）度方向に投げたときが最もよく飛ぶことが分かる。無回転の場合より回転させたときの方が投げる角度を1°～2°ほど角度を低くすればよいことが分かる。その時の飛距離は約（⑫[数値]）mである。

しかし，実際は低い角度で投げるときは初速度を大きくできるが，投げる角度を高くすると初速度が小さくなる。実際に最も遠くに投げる角度を求めるには，この点も考慮する必要がある。次に投球フォームについても考えてみよう。

図５はハンドボール投げの投球フォームを示したものである。投げた瞬間の高さを h，初速度の大きさを v_0，投射角度をθとする。

図5



8人の男子高校生の被験者Ａ～Ｈの8人にハンドボールを色々な高さに投げてもらい，その様子を動画撮影をした。その画像を分析することにより，h, v_0, θを測定した。その測定値hとθ，v_0とθに該当する位置に点を打つと，図６のように，ほぼ一次関数の関係にあることが分かった。それらの点に最も近い一次関数を求め，その一次関数を Ha， Hb， Va， Vb を用いて以下のようにあらわすことにした。

$$h = Ha\,\theta + Hb \qquad v_0 = Va\,\theta + Vb$$

Ａ～Ｈの8人に対して一次関数を求め，Ha， Hb， Va， Vb を取得すると図７のようになった。図６は被験者Ｈのものである。

図６

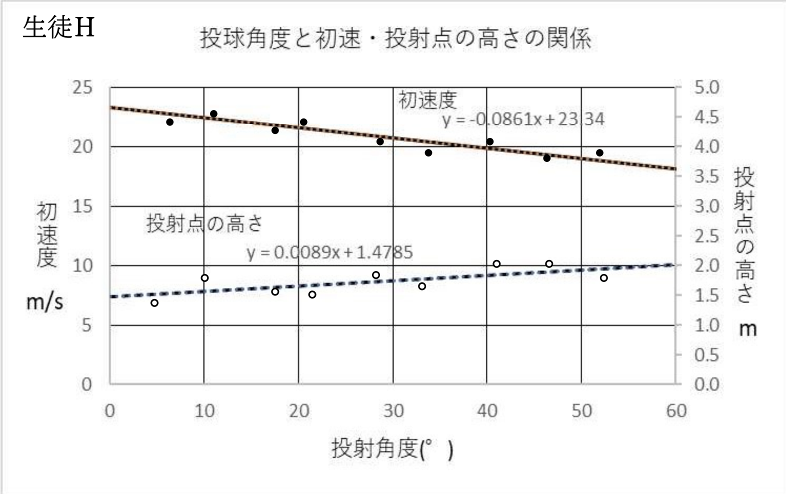
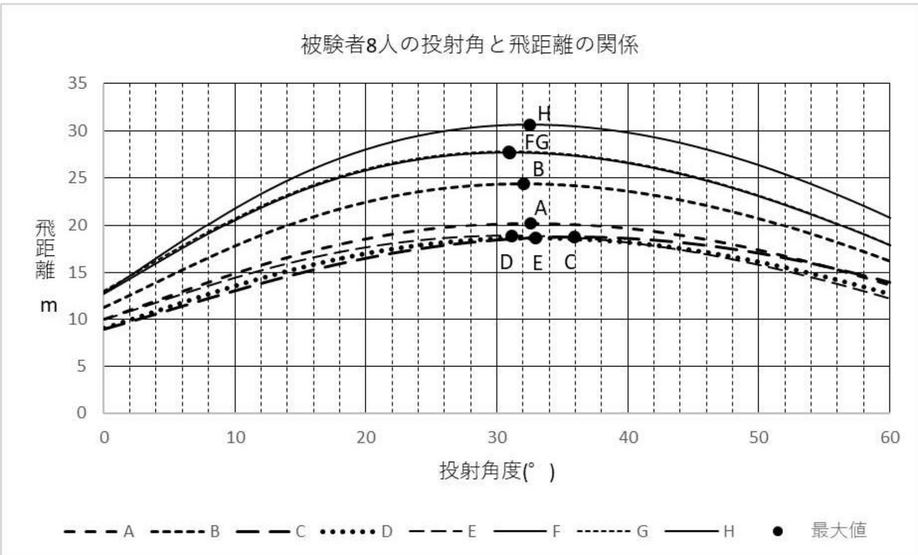


図７	A	B	C	D	E	F	G	H
Ha	0.0071	0.0070	0.0069	0.0080	0.0045	0.0099	0.0067	0.0089
Hb	1.68	1.57	1.71	1.54	1.71	1.54	1.69	1.48
Va	−0.063	−0.081	−0.027	−0.058	−0.074	−0.102	−0.101	−0.086
Vb	17.26	20.04	15.27	16.33	16.95	22.28	22.31	23.34

この8人が，色々な角度θの方向に図７の一次関数に従った高さと初速度でボールを投げた場合の飛距離をシミュレーション計算し，その結果をグラフにしたのが図８である。グラフ中最大飛距離となっているグラフ上の点に黒丸を付けた。

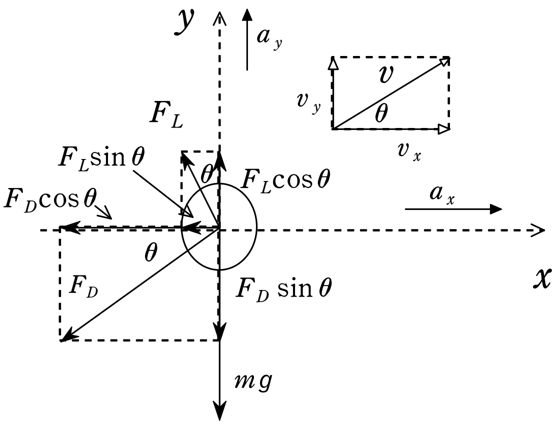
このグラフによると，最大飛距離となる角度は各自若干異なるが，Hは（⑬[数値]）°であり，他の被験者を合わせても30°～35°程度ということになる。各人角度が若干ずれても飛距離はほとんど変わらないので，この角度周辺に投げればよいことになる。

図８



G052ハンドボール投げ

解説



図より x 方向の運動方程式は

$$ma_x = -F_D\cos\theta - F_L\sin\theta$$

なので、　①　$-F_D\cos\theta$　　②　$-F_L\sin\theta$

となる。y 方向の運動方程式は

$$ma_y = -F_D\sin\theta + F_L\cos\theta - mg$$

となるので、　③　$-F_D\sin\theta$　　④　$F_L\cos\theta$　　⑤　$-mg$

である。

⑥　$\vec{a}$ は1s間の速度変化なので、時間Δtの速度変化は $\vec{a}\Delta t$ である。

よって、　$\vec{v'} = \vec{v} + \vec{a}\Delta t$　となるので、　$\vec{a}\Delta t$

⑦　$\vec{v}$ は1s間の変位なので、時間Δtの変位は $\vec{v}\Delta t$ となるので、

$\vec{x'} = \vec{x} + \vec{v}\Delta t$　となる。　よって、　$\vec{v}\Delta t$

⑧　図より　$\tan\theta = \dfrac{v_y}{v_x}$ となる。　よって、$\dfrac{v_y}{v_x}$

⑨　図3の35°のラインを読むと、真空中が24m、無回転が19m、10Hzの回転の場合が20mである。よって、真空中と無回転との差は　5m　となる。　　よって、5

⑩　⑨において、10Hzは無回転より1mほど大きい。よって、　1

⑪　図4で20m/sとなる位置の10Hzの角度を読み取ると　38°　よって、38

⑫　図3の10Hzのグラフで、38°の位置を読み取ると、20mとなっている。よって、20

⑬　図8のグラフでHの黒点の角度を読み取ると　32°