

1

稲妻に関する以下の文章の(①)～(⑫)の[]内に文字が示されている文字を用いた式を入れよ。

<稲妻の概要>

落雷は空気中に電気火花が飛ぶ現象であるが、電気火花が飛ぶには乾燥空気では 3.0×10^6 V/m以上の電場が必要である。実際は湿度や空気中のチリの影響を受け 1.0×10^6 V/m程度とされている。これを E_0 ($E_0 = 1.0 \times 10^6$ V/m) と置く。雷雲の底面の高さは1000～2000m、雷雲が負電荷を帯びており、地上がその電場で誘導されて正電荷を帯びた状態になっている。落雷時の電圧は $2.0 \times 10^6 \sim 1.0 \times 10^8$ Vとされている。この条件で電場の強さを計算すると、 $1.0 \times 10^3 \sim 5.0 \times 10^5$ V/mとなり、 E_0 にははるかに及ばない。この状態でなぜ落雷が起きるのであろうか。落雷より前に雷雲から周辺に稲妻が走る。稲妻が走った後の空気分子は電離し、電気を帯びた空気となり、電気の通り道ができる。1回の稲妻は50～200mほど進むようである。この稲妻が繰り返されることにより、地上付近まで電気の通り道ができ、地上までの残り部分の電場が E_0 となったときに、落雷が起きるとされている。この距離を落撃距離と呼び、地上から落撃距離までの位置をAとする。落撃距離は実測値で50m～200mとされている。落雷時の基礎データはその時の気象状況により大きく異なるので、ここでは、ある特定の値で計算することにする。電気を帯びた空気の電場の強さ E_1 を $E_1 = 1.0 \times 10^5$ V/mとして落雷の状態を考えてみることにする。ただし、この条件は気象状況により大きく異なるので、この計算結果がすべてではないことに注意を要する。

<コンデンサーとして考える>

地上をO、雲底をBとすると、OAが落撃距離で、これを L_0 [m]とし、 $AB = L_1$ [m]とする。落雷直前はAB間の電場が E_1 でOA間の電場が E_0 となっているはずである。地上の電位を0V、Aの電位を $-V_0$ 、AB間の電圧を V_1 とする。この状態を図示したのが図1である。

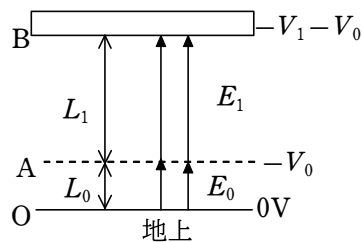


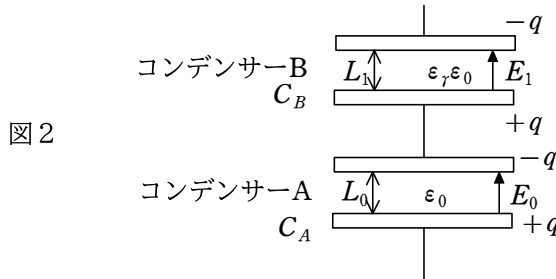
図1

落撃距離 L_0 及び E_0 を用いて、OA間の電圧 V_A を計算すると、 $V_0 = (①[L_0, E_0])$ となる。AB間の電圧 $V_1 = L_1 E_1$ となる。 $L_0 = 100$ m, $L_1 = 1000$ mとすると、数値的に $V_0 = 1.0 \times 10^8$ V, $V_1 = 1.0 \times 10^8$ Vとなる。

雷雲と地上との間を一種のコンデンサーと考えてこのコンデンサーの電気容量と落雷直前に蓄積されている電気量 q を求めてみよう。雲の面積が不明なので、面積を

G051稲妻

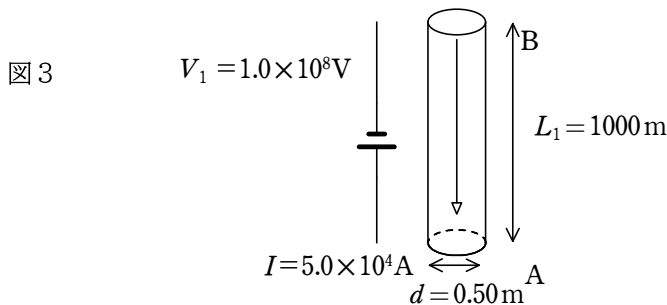
$S = 1\text{km}^2 = 1.0 \times 10^6\text{m}^2$ として考えることにする。この場合OA間をコンデンサーA, AB間をコンデンサーBと考える。コンデンサーAは通常の空気なので真空誘電率 ϵ_0 がコンデンサーAの誘電率とする。コンデンサーAの電気容量 C_A は $C_A = (2)[\epsilon_0, S, L_0]$ となるので、たまっている電気量 q_A は $q_A = (3)[C_A, V_0] = \epsilon_0 S E_0$ となる。コンデンサーB内の空間は電離しているので誘電率が真空中とは異なるので比誘電率 ϵ_r とすると、同様にコンデンサーBにたまっている電気量 q_B は $q_B = (4)[\epsilon_r, \epsilon_0, S, E_1]$ となる。コンデンサーAとコンデンサーBは直列配線と同じと考えられるので、 $q_A = q_B$ となる。よって、 $\epsilon_r = (5)[E_0, E_1] = 10$ となる。



$\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12}[\text{F/m}]$ とすると、たまっている電気量 q は $q = \epsilon_0 S E_0 = 8.9\text{C}$ となるので、 $C_A = 0.089\mu\text{F}$, $C_B = 0.89\mu\text{F}$ となり、合成容量は $\frac{C_A C_B}{C_A + C_B} = 0.081\mu\text{F}$ となる。

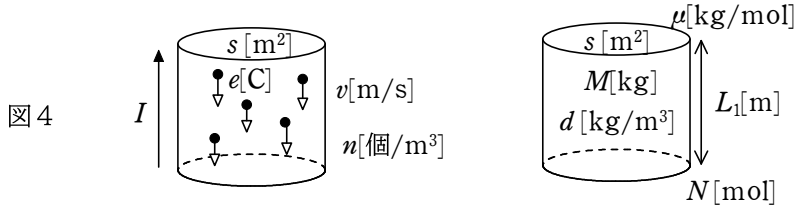
<稲妻を導線を通る電流として考える>

次に、稲妻を大気中を伝わる電流として、稲妻の性質を考えてみよう。雷雲が発生したとき、雷雲の下面が負に、地表が正に帯電し、雷雲から地上に電荷が移動するこの現象を落雷といい、その瞬間の光の帯を稲妻と呼んでいる。稲妻の太さは直径 $d = 0.50\text{m}$ 程度で、長さは $500\text{m} \sim 1500\text{m}$ 程度と言われている。稲妻は実際はジグザグしているが、ここでは図1のAB間の電流を考えてみることにする。稲妻を断面積 $s = \frac{\pi}{4} d^2 = 0.20\text{m}^2$, 長さ $L_1 = 1.0 \times 10^3\text{m}$ の円柱導線として計算してみる。電圧は $V_1 = 1.0 \times 10^8\text{V}$ とし、電流は数万Aとされているので、電流 $I = 5.0 \times 10^4\text{A}$ とする。この円柱の抵抗 R は $R = (6)[V_1, I]$ $= 2.0 \times 10^3\Omega$ と計算される。抵抗率 ρ は $\rho = R \frac{s}{L_1} = 0.40\Omega\text{m}$ となる。



稲妻の消費電力 P は $P = (7)[I, V_1] = 5.0 \times 10^{12}\text{W}$ となり、稲妻の光っている時間 t

を $t = 1.0 \times 10^{-3} \text{s}$ とすると、稲妻の持つエネルギー Q は $Q = Pt = 5.0 \times 10^9 \text{J}$ となる。よって、稲妻によって移動した電気量 q は $q = (\textcircled{8}[Q, V_1]) = 50 \text{C}$ となる。稲妻内部の電場の強さ $E_1 = 1.0 \times 10^5 \text{V/m}$ で、空気の絶縁 $E_0 = 1.0 \times 10^6 \text{V/m}$ よりもだいぶ低い。これは、稲妻が走る前に先行放電が起こることにより、空気分子が電離しイオンとなり、電荷の通り道ができているためである。この電荷の動きも電流となるが、複雑となるので、ここでの電流はすべて自由電子の動きとして考えることにする。



電子の電気量を $e[\text{C}]$ 、単位体積当たりの自由電子密度を $n[\text{個}/\text{m}^3]$ 、電子の平均移動速度を $v[\text{m}/\text{s}]$ とすると、稲妻の落下速度 v は $v = 1.0 \times 10^8 \text{m}/\text{s}$ とされているので、

$$en = \frac{I}{vs} = 1.0 \times 10^{-3} \text{C}/\text{m}^3 \text{ となる。 } e = 1.6 \times 10^{-19} \text{C} \text{ なので、 } n = 6.25 \times 10^{15} \text{個}/\text{m}^3 \text{ となる。}$$

空気密度を $d = 1.3 \text{kg}/\text{m}^3$ とすると、この円柱の質量 M は $M = sL_1d = 250 \text{kg}$ となる。

空気のモル質量 μ を $\mu = 0.029 \text{kg}/\text{mol}$ とすると、この円柱内にある空気の物質質量 N は

$N = (\textcircled{9}[M, \mu]) = 8.5 \times 10^3 \text{mol}$ となる。 1m^3 中の空気分子数 n_0 はアボガドロ数を N_0 とす

ると、 $n_0 = \frac{d}{\mu} N_0 = 2.6 \times 10^{25} \text{個}/\text{m}^3$ となり、これは自由電子密度 n の 4.2×10^9 倍である。

空気分子42億個に1個の割合で自由電子が存在していることになる。自由電子の平均速度は $v = 1.0 \times 10^8 \text{m}/\text{s}$ とされているので、熱運動による速さよりもはるかに速い。この自由電子が空気分子と衝突することにより、空気分子は発熱する。

<稲妻の発熱量から風圧を考える>

静止していた自由電子が電場 E_1 によって加速され、空気分子と衝突して静止したととし、衝突から衝突までの距離を λ とすると、平均速度が v なので、衝突直前の速度は $2v$ となる。



自由電子の加速度 a は自由電子の質量を m_e とすると、 $a = (\textcircled{10}[e, E_1, m_e]) = 1.8 \times 10^{16} \text{m}/\text{s}^2$ となる。よって、衝突から衝突までの時間 dt は $dt = \frac{2v}{a} = 1.1 \times 10^{-8} \text{s}$ となる。よ

って、 $\lambda = vdt = 1.1 \text{m}$ 。この時に自由電子の持つ運動エネルギーが空気分子に渡ったと考えられる。自由電子が 1.1m 移動する間に空気分子と衝突しないということは、空気分子が破壊されてできたイオンによって自由電子の通り道ができているためと考えられる。

$$eE_1 = kv \text{ と置いた時の } k \text{ を抵抗係数という。 } k = \frac{eE_1}{v} = 1.6 \times 10^{-22} \text{Ns}/\text{m}$$

稲妻の持つエネルギーが大気の温度上昇にすべて使われたとする。空気の定積モル比熱

G051稲妻

C_v が気体定数を R として, $\frac{5}{2}R$ とすると, 温度が ΔT 上昇したときの 内部エネルギーの上昇 ΔU は $\Delta U = (\text{㉑}[N,R,\Delta T])$ となる。この変化は急激な変化なので断熱変化と考えてよいが, 稲妻のエネルギーが熱エネルギーとなるのは一瞬なので, 温度上昇を計算するのは定積変化と考えてよい。発熱量 $Q = (\text{㉒})$ となり, $\Delta T = \frac{2Q}{5NR} = 2.8 \times 10^4 \text{K}$ となる。最初の気温 300K 程度は, 有効数字外なので, 稲妻内部の空気の温度は $2.8 \times 10^4 \text{K}$ となる。

この気温の気体分子の平均質量を m , 二乗平均速度を $\overline{v^2}$ とすると, 分子の平均運動エネルギー $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ はボルツマン定数を k をおいて, $\frac{3}{2}kT$ で表される。また,

$k = 1.4 \times 10^{-23} \text{J/K}$, $m = \frac{\mu}{N_0} = 4.8 \times 10^{-26} \text{kg}$ となる。この値を用いると, 空気分子の二

乗平均速度の平方根は $\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1.6 \times 10^5 \text{m/s} = 160 \text{km/s}$ となる。この速さで,

稲妻が通過した空気の体積が膨張することになり, この速さは音速 340m/s をはるかに超えているので, 衝撃波となり, 周辺に伝わっていく。これが雷鳴である。この時に生じる圧力 P は状態方程式より $(\text{㉓}[N,R,T,s,L_1]) = 1.0 \times 10^7 \text{Pa} = 100 \text{atm}$ となり, 100 気圧の圧力で空気が急膨張することになり, 周辺の物質は吹き飛ばされてしまう。

G051稲妻

解説

① 電場 E_0 とは、1mあたり、 E_0 [V] という意味なので、距離 L_0 では $L_0 E_0$ [V] となる。
よって、 $L_0 E_0$

② 極板間 d 、極板面積 S 、誘電率 ϵ のコンデンサーの電気容量は $\epsilon \frac{S}{d}$ で表される。

よって、 $\epsilon_0 \frac{S}{L_0}$

③ 電気容量 C の極板間電圧が V のとき、コンデンサーに貯まる電気量 Q は、
 $Q = CV$ で表される。よって、 $C_A V_0$

④ $C_B = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{L_1}$ 、 $V_1 = L_1 E_1$ である。よって、

$$q_B = C_B V_1 = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{S}{L_1} \times L_1 E_1 = \epsilon_r \epsilon_0 S E_1$$

⑤ $q_A = \epsilon_0 S E_0$ 、 $q_B = \epsilon_r \epsilon_0 S E_1$ であり、 $q_A = q_B$ なので、

$$\epsilon_r \epsilon_0 S E_1 = \epsilon_0 S E_0 \text{ となる。よって、} \epsilon_r = \frac{E_0}{E_1}$$

⑥ オームの法則より $R = \frac{V_1}{I}$

⑦ 電力の式 $P = IV$ より、 IV_1

⑧ 電圧 V は +1C を運ぶ仕事 qV [J] であることを意味している。貯まった電気エネルギーが Q [J] なので、 $Q = qV_1$ である。移動した電気量は $\frac{Q}{V_1}$

この公式は通常 $W = qV$ であるが、ここで言う Q は電気量を意味しているのではなく電気エネルギー W を意味していることに注意

⑨ モル質量 μ は 1mol の質量が μ [kg] であることを意味している。よって、質量 M [kg] の物質の物質量は $\frac{M}{\mu}$ となる。化学ではモル質量の単位は g/mol であるが、物理では kg/mol を使うことが多いので注意を要する。

⑩ 電子は電場より eE_1 の力を受けている。よって、運動方程式は

$$ma = eE_1 \text{ となるので、} a = \frac{eE_1}{m_e}$$

⑪ 定積モル比熱を C_v [J/molK] とするとき、 n [mol] の物質が ΔT [K] 上昇したときの内部エネルギーの増加分は $\Delta U = nC_v \Delta T$ で表される。ここでは、 $C_v = \frac{5}{2}R$ 、 $n = N$ なので、

$$\frac{5}{2}NR\Delta T$$

⑫ 状態方程式 $PV = nRT$ で、 $V = sL_1$ なので、 $\frac{NRT}{sL_1}$