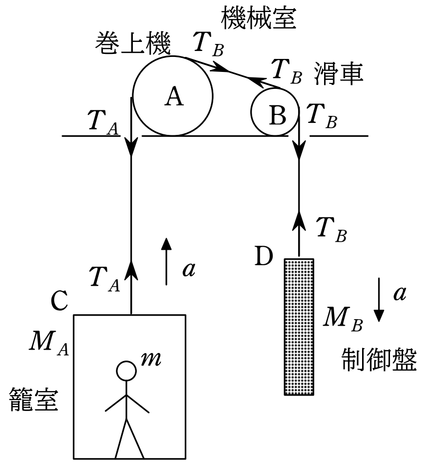
G050エレベーター

1

　エレベーターの運動の様子を論じた以下の文章の（①）～（⑫）の[　]内に文字が示されている場合はその文字を用いた式を[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

図 1



　ロープ巻上式エレベーターは，屋上の機械室にある巻上機Aに人が乗る質量 M_A の籠室Cを取り付け，滑車Bを通して質量 M_B の制御盤Dにつないである。巻上機Aは接線方向に大きさ F の力を加えることができるものとする。重力加速度の大きさを g とし，ロープの質量は無視でき，滑車は滑らかに回るものとする。籠室Cに働いているロープの張力の大きさを T_A，制御盤Dのロープに働いている張力の大きさを T_B とする。

　巻上機に右回りに大きさ F の力を加えると T_A ， T_B の間に

$$T_A - T_B = F \qquad \text{(i)}$$

　の関係がある。

　籠室が大きさ a の加速度で上昇するとき，籠室Cの運動方程式は

$$(M_A + m)a = T_A - \text{（①[} M_A, m, g \text{]）} \qquad \text{(ii)}$$

　制御盤Dの運動方程式は

$$M_B a = \text{（②[} M_B, g, T_B \text{]）} \qquad \text{(iii)}$$

　(i)(ii)(iii)を連立させて解くと，

$$\begin{cases} F = (M_A + M_B + m)a + (M_A - M_B + m)g \\ T_A = (M_A + m)(g + a) \\ T_B = M_B(g - a) \end{cases} \qquad \text{(iv)}$$

となる。

　M_B は M_A に最大積載量の半分の質量を加えた質量にしてエレベーターを設計しているが，ここでは，簡単のために $M_A = M_B$ とする。さらに文字計算では複雑となるので，以降は数値計算で考えるものとする。

　以降 $M_A = M_B = 1000\text{kg}$， $g = 10\text{m/s}^2$， $m = 100\text{kg}$ として考えることにする。

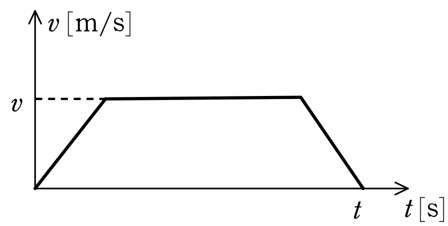
これらの数値を代入すると，(iv)は

$$\begin{cases} F=2100a+1000 \\ T_A=1100a+11000 \\ T_B=-1000a+10000 \end{cases} \qquad \text{(v)}$$

このエレベーターの上昇最高速度を v [m/s]，上昇加速度を a [m/s^2]とする。上昇時と下降時は速度･加速度共に同じ大きさとする。

このエレベーターは動き始めてから（③[v,a]）[s]後に最高速度に達する。出発してから静止するまでの時間 をtとすると，しばらく最高速度で上昇し，加速度$-a$[m/s^2] で減速し（③）[s]後に静止する。この状態を $v-t$グラフに表すと，

図２



加速時の平均速度は $\dfrac{v}{2}$ [m/s]で，（③）[s]加速するので，上昇距離は（④[v,a]）[m]である。減速時も同じ数値となるので合わせて $\dfrac{v^2}{a}$ [m]の距離を移動することになる。出発してから静止するまでの時間を t とすると，等速で上昇する時間は $t-\dfrac{2v}{a}$ で表されるので，上昇する高さ h は

$$h = vt-\frac{v^2}{a} \qquad \text{(vi)}$$

となる。通常のビルは１F当たり3.5m程度である。例えば，1Fから3Fに上昇するには7.0m上昇する必要がある。よって，1Fから nFまで上昇するときは,

$$h = （⑤[n]） \qquad \text{(vii)}$$

(vi)(vii)より，

$$t=\frac{3.5}{v}n+\frac{v}{a}-\frac{3.5}{v} \qquad \text{(viii)}$$

と表される。 $v=1.0$ m/s， $a=0.5$m/s^{2}とすると，加速時間は（⑥[数値]）sで，その間の上昇距離は（⑦[数値]）mである。

この場合，1F～ nFまで上昇するときの高さと経過時間をグラフにしたものが図３と図４である。

図３

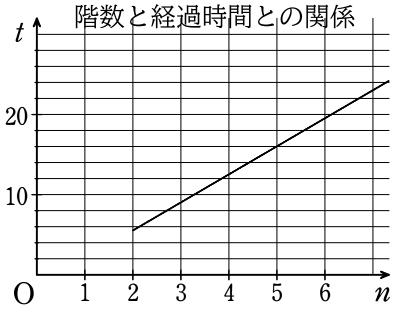
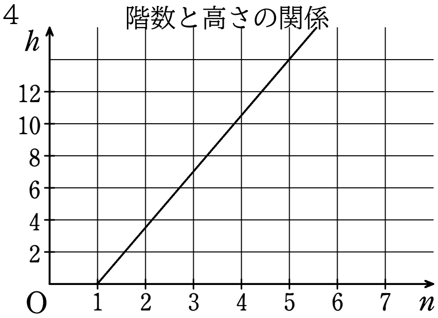


図４



次にエレベーター上昇時の消費電力について考えてみよう。(v)より，加速時の巻上機の力 F は $F=$（⑧[数値]）N，で減速時は $F=-50$N，等速時は1000Nとなる。よって，上昇時の巻上機の仕事は加速時（⑨[数値]）J，等速時の仕事は等速での移動距離が $h-2$ なので，（⑩[h]） [J]，下降時は-50Jとなる。よって，合計仕事 W は

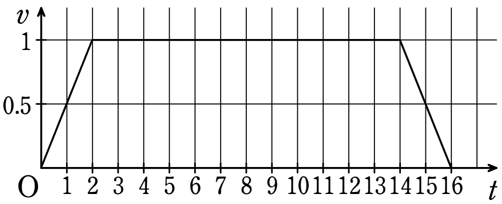
$$W=1000h$$

となる。これは，積載物の重力による位置エネルギーの上昇分mgh と等しく，籠室や制御盤の位置エネルギーは巻上機の仕事には関係ないことが分かる。以降は籠室内の質量 m の積載物のみについて考えることにする。

上昇時の消費電力（仕事率＝1秒当たりの仕事）は（⑪[数値]）W，等速時は1000W，減速時は-25Wである。

これを1Fからエレベータに乗り5Fまで上昇する場合の出発してからの時間ごとの全力学的エネルギー E の変化について考えてみよう。 $v-t$ グラフは図５のようになる。

図５



各時刻の籠室の高さを計算すると以下のようになる。

加速時　$0\leqq t<2$　$v=0.5t$ より，　$x=\dfrac{1}{2}vt=0.25\,t^2$　$t=2$ の時，$x=1$m

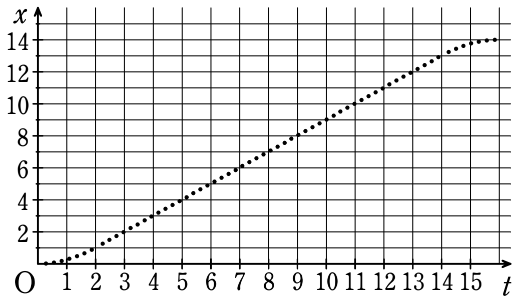
等速時　$2\leqq t\leqq 14$　$v=1$　より　$x=1+v(t-2)=-1+t$　$t=14$ の時　$x=13$

減速時　$14\leqq t\leqq 16$　$v=1-0.5(t-14)=8-0.5t$　より，

$$x=13+\frac{1+8-0.5t}{2}(t-14)=-0.25t^2+8t-50$$

$x-t$ グラフは図６のようになる。

図６



次に全力学的エネルギーを計算する。E は仕事した分だけ増加することになる。

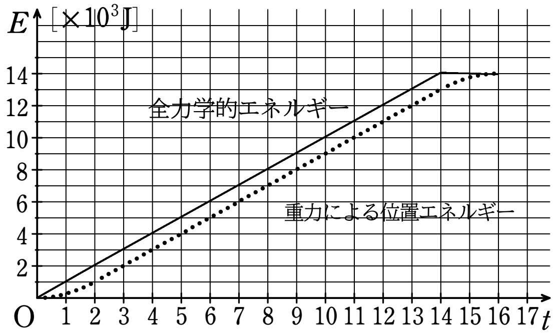
加速時　$0 \leqq t < 2$　において $E = 1025\,t$　$t = 2$ の時，$E = 2050$ J

等速時　$2 \leqq t \leqq 14$　において，$E = 2050 + 1000\,(t-2)$　$t = 14$ の時　$E = 14050$ J

減速時　$14 \leqq t \leqq 16$　において，$E = 14050 - 50\,(t-14)$　$t = 16$ の時　$E = 13950$ J

次に位置エネルギーについて考えてみよう。$mg = 1000$Nとして考える。$x-t$ グラフのxに mg をかけると位置エネルギーとなる。１F～５Fに上昇するときの籠室内の積載物の全力学的エネルギーの変化と重力による位置エネルギーの変化をグラフにしたのが図７である。グラフの差が運動エネルギーを示している。

図７



このグラフを見ると，エレベーターの移動においてほとんどが，巻上機のした仕事は，ほとんどが重力による位置エネルギーの上昇に使われており，運動エネルギーの上昇はわずかであることが分かる。このグラフより，このエレベータの全力学的エネルギーが最大になっているのは t=（⑫[数値]）sの時である。

G050エレベーター

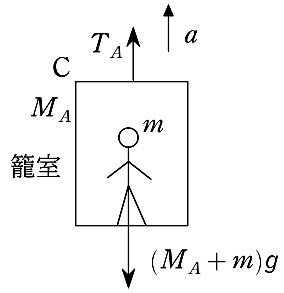
(解説)

① 図より運動方程式は

$$(M_A+m)a=T_A-(M_A+m)g$$

となる。よって、

$(M_A+m)g$

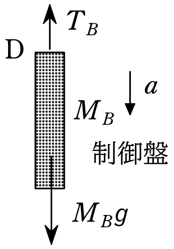


② 図より　運動方程式は

$$M_Ba=M_Bg-T_B$$

となる。よって、

M_Bg-T_B



③ 加速度 a は1秒間に a ずつ早くなることを意味しているので、 v になるまでの時間は

$\dfrac{v}{a}$

④ 平均速度が $\dfrac{0+v}{2}$ なので、平均速度×時間は $\dfrac{0+v}{2}\times\dfrac{v}{a}$ となるので、 $\dfrac{v^2}{2a}$

⑤ 1Fの高さが3.5mなので、上昇した階数に3.5をかければよい。スタートが1Fなので、n Fまで上昇する階数差は $n-1$ となる。よって、高さは　$3.5(n-1)$

⑥ $v=1.0$ m/s, $a=0.5\text{m/s}^2$より、1秒ごとに0.5m/sずつ早くなるので1.0m/sになるまでの時間は2.0sとなる。よって、　2.0

⑦ ⑥における平均速度は $\dfrac{0+1}{2}=0.5$m/s、加速時間が2.0sなので、$0.5\times2.0=1.0$m

よって、1.0m

⑧ (v)　$F=2100a+1000$ に $a=0.5\text{m/s}^2$を代入すると $F=2050$Nとなる。

よって、2050

⑨ 仕事は力と距離の積である。力は2050N、加速した距離は1.0mなので、

$W=2050\times1.0=2050$J　　　よって、2050J

⑩ 等速時は $a=0$なので、(v)　$F=2100a+1000$ に代入して、 $F=1000$N、移動距離が $h-2$ なので、仕事は　　$1000(h-2)$[J]

⑪ 消費電力は1sあたりの仕事である。加速時は2.0s間で、2050Jの仕事をしているので、

$\dfrac{2050}{2}=1025$Wとなる。　よって、1025

⑫ 図7を見ると力学的エネルギーが最も大きくなっているのが $t=14$sのときである。

よって、14

＜別解＞　減速時の仕事が負なので、減速開始の瞬間が最も力学的エネルギーが大きくなっている。よって、 $t=14$s