G048望遠鏡の分解能

以下の文章は，望遠鏡でどこまで見ることができるかを説明したものである。文章中の（①）～（⑫）の[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を、[数値]とある場合はあてはまる数値を入れよ。

図１のようにスリット間隔dの二つのスリットS_1,S_2を持つダブルスリットから距離L離れたところにダブルスリットと平行にスクリーンを置いた。S_1,S_2の中点Mから引いた垂直二等分線とスクリーンとの交点をOとする。スクリーン上にOP＝xとなる点Pをとる。この時の光の経路差S_1P-S_2Pは（①[x,d,L]）とあらわされる。

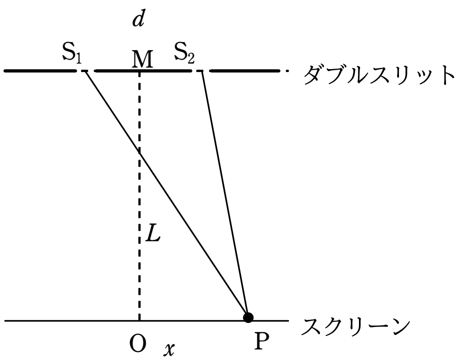


図１

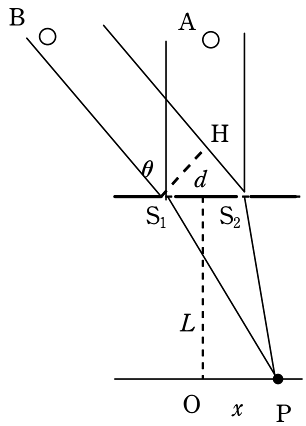


図２

つぎに図２のように、この装置の正面にある光源Aと角度θだけ左側にある光源Bからの光について考える。両光源共にはるかかなた遠くにあるので両光源からの光は共に平行光線と考えてよい。光源Aからの光はダブルスリットに達したときS_1，S_2は同一波面上にあるので、光源Aからの光の干渉の強め合う条件式は波長λ、整数mとすると、

（①）＝（②[λ,m]）　　　　　(1)

となる。一方光源Bからの光はS_1からS_2の射線に垂線を引きその足をHとし，S_2HはS_2H＝（③[d,θ]）とあらわされるので、スクリーン上での光源Bからの光が強め合う干渉の条件式は経路差が$HS_2+S_2P-S_1P$となるので，

（③）－（①）＝（②）　　(2)

であらわされる。

光源Aからのスクリーン上での中央明線の位置はO点であり、明線間隔は（④[L,λ,d]）である。光源Bからの光のスクリーン上での中央明線とOとの距離は（⑤[L,θ]）で、右側にあり、明線間隔は（④）である。これをスクリーン上の干渉縞の明るさをグラフであらわすと光源Aが図３、光源Bが図４となる。

図3

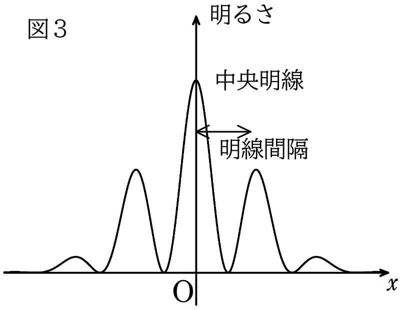
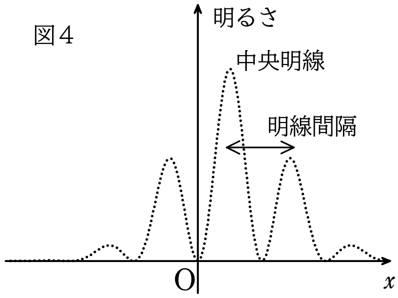


図4



光源Aと光源Bを同時に観測すると二つの明線が重なって見える。図５はA，Bの干渉縞が明線間隔の半分ずれた場合、図６は明線間隔と同じだけずれた場合の合成波を表したものである。

図５

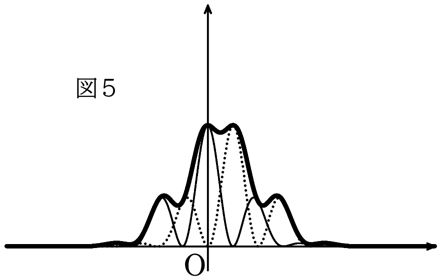


図６

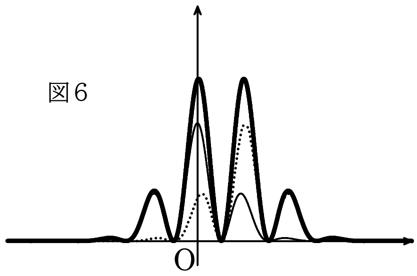


図５では二つの干渉縞が重なってしまい光源A，Bの判別が難しいが、図６では光源が二つあることがよくわかる。つまり、二つの光源を見分けるには（⑤）＞（④）なる関係が必要となる。この時、$\theta \fallingdotseq 0$と考えてよいので，$\sin\theta \fallingdotseq \theta$と置いて$\theta$＞（⑥[$d,\lambda$]）となる。この（⑥）を分解能と呼んでいる。$d$が大きければ大きいほど分解能が小さくなり、細かいものを見ることができるようになるのである。スリットS_1，S_2に該当する位置に二つの望遠鏡を置くと、一つの望遠鏡では見分けられない接近した二つの星を見分けることができるようになる。このような装置を干渉計と呼んでいる。

これをヒトの眼球で考えてみよう。dが瞳の直径（ s とする）と考えればよい。瞳の直径は明るいところで$s = 4.0\times10^{-3}$mであり、紫の光の波長4.0×10^{-7}mで考えると、分解能は（⑦[数値]）となる。視力1.0は分解能が1度の$\dfrac{1}{60}$（＝1分）と定義されており，

$$\tan\frac{1}{60}^{\circ} = \tan\left(\frac{\pi}{180}\times\frac{1}{60}\right) \fallingdotseq \frac{\pi}{180}\times\frac{1}{60} = 3.0\times10^{-4}$$

である。分解能3.0×10^{-4}が視力1.0となる。視力はこれに反比例するので，肉眼の理論上の視力は（⑧[数値]）となる。

G048望遠鏡の分解能

つぎに，天体望遠鏡の分解能について考えてみよう。

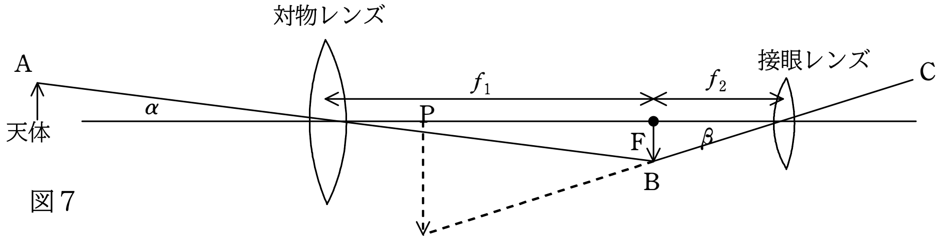


図７

図７のように天体望遠鏡は観察対象物体は非常に遠くにあるので、Aからの入射光は光軸に平行と考えてよい。よって、対物レンズの像を結ぶのは焦点の位置となる。線分ABは天体の上端からレンズの中央を通過する射線を意味している。この射線が光軸に対して角度α（$\alpha \fallingdotseq 0$，このαが図２のθに該当する）で入射したとする。対物レンズの焦点距離をf_1とし、焦点をFとする。この実像を焦点距離f_2の接眼レンズでさらに拡大するわけであるが、虚像の倍率を大きくするためには接眼レンズの焦点のすぐ内側に実像があればいいので、近似的にこの実像は接眼レンズの焦点上にあると考えてもよい。線分BCは目に入る実像の上端からレンズの中央を通過するの射線である。射線BCと光軸との角度をβ（$\beta \fallingdotseq 0$）とする。入射角αで入射した光が入射角βから入射したように見えるので，この望遠鏡の倍率nをtanを使わずα，βであらわすと，$n=$（⑨[α,β]）となる。FB$=f_1\tan\alpha=f_2\tan\beta$であり、$\tan\alpha \fallingdotseq \alpha$，$\tan\beta \fallingdotseq \beta$と置くと，

$$n=（⑩）=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=（⑪[\ f_1,f_2\ ]）$$

となる。焦点距離の長い対物レンズと焦点距離の短い接眼レンズを用いれば望遠鏡の倍率はいくらでも高くすることができる。

次に、像の明るさについて考えてみよう。光の量はレンズの断面積に比例する。瞳孔の直径をs、対物レンズの直径をD（図２のdに該当する）とすると、この望遠鏡を用いた場合、瞳孔に入る光の量はレンズの面積に比例するので、肉眼の$\left(\frac{D}{s}\right)^2$倍となる。望遠鏡の倍率を$n$倍とすれば、これが$n$倍に拡大されるので、単位面積当たりの光の量が$\frac{1}{n^2}$倍となる。よって、像の明るさは肉眼の（⑪[D,s,n]）倍となる。口径10cm（$D=0.10$m）の望遠鏡を使うと、$\frac{D}{s}=$（⑫[数値]）となるので，肉眼と同じ明るさで見るための望遠鏡の倍率は$n=$（⑫）程度が理想となる。それより拡大すると像は次第に暗くなる。

また、分解能は（⑥）なので、口径Dの望遠鏡では分解能は（⑬[λ, D]）となり、口径10cmの望遠鏡では肉眼の$\frac{1}{⑫}$倍の小さな物まで見分けがつくことになる。この望遠鏡で100倍に拡大しても$\frac{1}{100}$倍の小さな物を見ることができないのである。

双眼鏡や単眼鏡も同様の理論で口径から理想の倍率が計算でき、それを大きく超える倍

率にしても暗くてぼやける結果となり無駄といえる。宣伝に騙されないようにしよう。

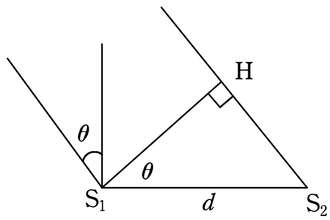
G048望遠鏡の分解能

(解説)

① 距離差なので、 $\dfrac{xd}{L}$

② 強めあう条件式なので、 $\dfrac{xd}{L}=m\lambda$ よって、 $m\lambda$

③ $\angle S_2S_1H=\theta$ $S_2S_1=d$
なので、$S_2H=d\sin\theta$
よって、 $d\sin\theta$



④ $\dfrac{xd}{L}=m\lambda$なので、

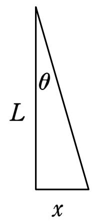
$x_m=\dfrac{Lm\lambda}{d}$

$x_1=\dfrac{L\lambda}{d}$、 $x_0=0$

$\Delta x=x_1-x_0=\dfrac{L\lambda}{d}$

⑤ Bからの光の干渉の条件式は 経路HS_2P－経路$S_1P=m\lambda$
これは $S_2H-(S_1P-S_2P)=m\lambda$
ここで、$S_1P-S_2P=\dfrac{xd}{L}$、$S_2H=d\sin\theta$、中央銘仙なので、 $m=0$

これらを代入すると、 $d\sin\theta-\dfrac{xd}{L}=0$



よって、 $x=L\sin\theta$
となるのであるが、$d<<x<<L$なので、
単純に $x=L\sin\theta$ でもよい。

⑥ 図5より、$L\sin\theta>\dfrac{L\lambda}{d}$のときに2つに見える

$\theta\fallingdotseq 0$なので、$\sin\theta\fallingdotseq\theta$ となるので、 $\theta>\dfrac{\lambda}{d}$

よって、 $\dfrac{\lambda}{d}$

⑦ $\dfrac{\lambda}{d}=\dfrac{4.0\times10^{-7}}{4.0\times10^{-3}}=1.0\times10^{-4}$

⑧ 視力1.0は$\theta=3.0\times10^{-4}$なので、1.0×10^{-4}はその3倍小さいものまで見えることになる。
よって、 3.0

⑨ αの角度で見える像をβの角度で見えるようにしているので、倍率は、 $\dfrac{\beta}{\alpha}$

⑩ $FB=f_1\tan\alpha=f_2\tan\beta$なので、 $\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\dfrac{f_1}{f_2}$

$\tan\alpha\fallingdotseq\alpha$，$\tan\beta\fallingdotseq\beta$と置くと

$n=\dfrac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{f_1}{f_2}$ よって、 $\dfrac{f_1}{f_2}$

⑪ $\left(\dfrac{D}{s}\right)^2$倍の$\dfrac{1}{n^2}$倍なので、 $\left(\dfrac{D}{ns}\right)^2$

⑫　$s=4.0\times10^{-3}$m、$D=0.10$より、$\dfrac{D}{s}=\dfrac{0.10}{4.0\times10^{-3}}=25$

⑬　⑥の$\dfrac{\lambda}{d}$に$d=D$を代入すればよい。$\dfrac{\lambda}{D}$