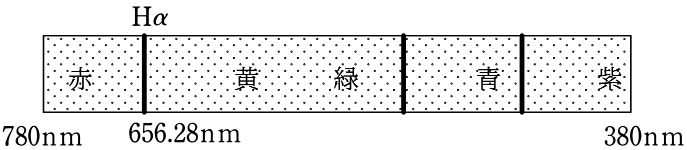
G045ハッブルの法則

$\boxed{1}$

　ドップラー効果は音だけではなく光でも起こる現象である。光のドップラー効果に関する以下の文章の（①）～（⑬）において[　]内に文字が指定してある場合はその文字を用いた式で，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

　ドップラー効果を利用すると，物体の観測者に対する相対速度を測定することができる。ここでは光のドップラー効果について考えてみよう。光も音と同じくドップラー効果が起こる。光の速度は音速よりも速いので，非常に高速で動いている物体に対して利用できる。天体のドップラー効果を測定することにより，その天体が地球に近づいているか遠ざかっているかの速度（視線速度という）がわかる。
　恒星から届いた光を波長ごとに分離すると色ごとに分かれる。波長の長いほうから赤→黄→緑→青→紫と順次色が変わっていく。これをスペクトルという。図１はある天体からの光のスペクトルを表したものである。

図１



　このスペクトルをよく見ると特定の位置に暗線（フラウンホーファー線という）が入っている。これは，恒星大気に存在する元素によって，特定波長の光が吸収されるためにおこる。この波長は元素によって正確に決まっているので，この暗線の位置からその恒星の大気の成分を知ることができるのである。恒星大気の主成分は水素であるから水素原子が吸収する光の波長の位置に必ず強い暗線が存在する。その中で最も強い暗線をHα線という。Hα線の波長は656.28nm（1nm＝10^{-9}m）である。静止している恒星のスペクトルには必ずこの位置に強い暗線が存在する。この波長をλ_0とする。ドップラー効果が起こるとこの暗線の位置がずれるので，そのずれを利用してその恒星の視線速度が計算できる。
　この波長λ_0は全宇宙どこでも同じである。光速度をc，この天体の遠ざかる速度をv，光の周期をTとして観測される光の波長を計算してみよう。図２は静止している恒星Pと速さvで遠ざかっている恒星P’から出た同じ波長の光の伝わる様子を図示したものである。恒星Pの場合はAB間が波長となり，その長さはλ_0である。静止している恒星Pから出たHα線の光は光速度cで時間Tだけ進むので，λ_0＝（①[c,T]）となる。一方恒星P’のHα線は１周期の光が出る時間Tの間に速さvで遠ざかっているために，恒星Pの波長λ_0より（②[v,T]）だけ長くなっているはずである。これを$\Delta\lambda$とする。$\Delta\lambda$＝（②）である。（①），（②）よりTを消去すると$\Delta\lambda$＝（③[v,c,λ_0]）となる。恒星PからのHα線の光の振動数をf_0とすると，f_0＝（④[c,λ_0]）となる。恒星P’のHα線の振動数をfとするとf＝（⑤[$c,\lambda_0,\Delta\lambda$]）である。（④），（⑤）及び（③）式より$\Delta\lambda$を消去すると，$f$＝（⑥[$c,v$]）×$f_0$となる。音によるドップラー効果と同じ式となる。
c＝3.0×10^8m/s，λ_0＝656.28nmとして，vと$\Delta\lambda$の関係をグラフにしたのが図３である。

この式で遠ざかる速度とはHα線のずれとの関係が求められる。

図２

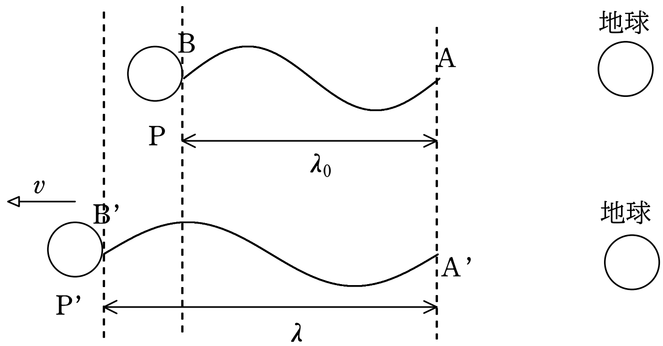
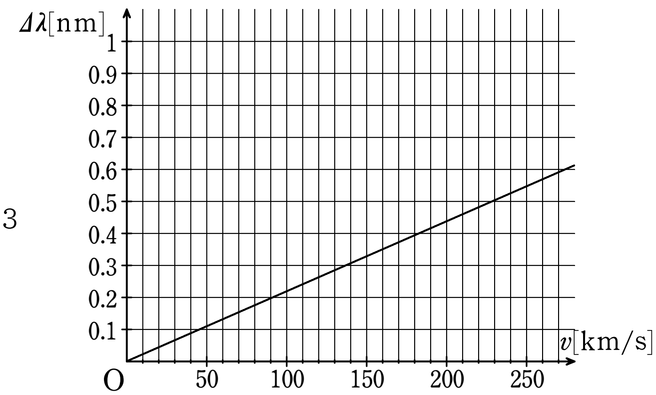


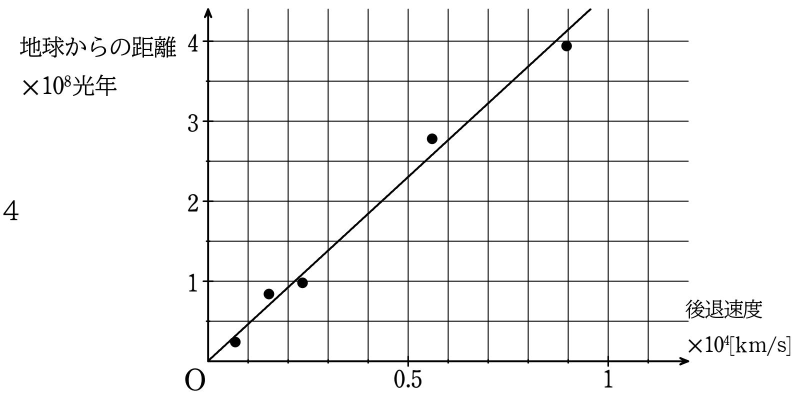
図３



このグラフを使うとスペクトルのHα線が656.48nmの位置にあった天体の地球から遠ざかる速度は（⑦[数値]）km/sということがわかる。また，180km/sで地球から遠ざかっている天体のスペクトルのHα線の位置は（⑧[数値]）nmとなる。

ハッブルはこのような方法で，遠くの天体（銀河）までの距離と地球から遠ざかる速さの関係を調べてグラフにしてみた。そのグラフが図４である。その結果，両者はほぼ比例関係にあることが分かった。（ハッブルの法則）

図４



天体（銀河）までの距離をD[光年]，（1光年は光が1年かかって進む距離で約9.6×10^{12}k mである。）遠ざかる速さをV[km/s]とするとHを比例定数として　$D=HV$なる関係が成立しているのである。この比例定数Hをハッブル定数と呼んでいる。この定数は不正確であるが現在のところ$H=4.6\times10^4$[光年/（km/s）]程度とされている。この法則が成り立つことは宇宙が膨張していることを意味しており，自然界で最も速いのが光速度$c=3.0\times10^5$km/sなので，宇宙最遠方の天体が光速度で膨張していると仮定すると，Vに光速度を代入することにより最遠方の天体までの距離すなわち宇宙の半径が計算できる。宇宙の半径 R は（⑨[数値]）光年となり，膨張を始めたのは（⑨）年前となる。宇宙は（⑨）年前にある一点から膨張を始めたことになる。これが宇宙の年齢とされており，この現象をビッグバンと呼んでいる。

万有引力の法則とエネルギー保存則からハッブルの法則を確認してみよう。地球を中心として半径 r の球内の宇宙空間を考えてみよう。宇宙の密度は一様でρとする。万有引力はこの球内の物質のみから生じるとし，球外の物質からの万有引力は無視できるものとする。球内の天体の総質量を M，この球表面にある天体の質量を m，万有引力定数を G，天体が遠ざかる速度を v とすると，この天体の力学的エネルギーは0と考えられるので，

（⑩[m,v]）－（⑪[G,M,m,r]）＝0　　(i)

また，球内の全質量は $M=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$ となるので，(i)に代入すると，

（⑩）＝$\dfrac{4}{3}\pi G\rho m r^2$

で，$r=\sqrt{\dfrac{3}{8\pi G\rho}}\,v$ となり，v と r が比例することになり，ハッブルの法則の証明となっている。この式よりハッブル定数は $H=$（⑫[G,ρ]）となり，宇宙密度ρを求めることが可能となる。$\rho=\dfrac{3}{8\pi GH^2}$ に $G=6.67\times10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$，$H=4.6\times10^4$[光年/（km/s）]$=4.6\times10^4\times9.6\times10^{12}\mathrm{s}=4.4\times10^{17}\mathrm{s}$を代入すると，$\rho=9.2\times10^{-27}\mathrm{kg/m^3}$が宇宙の平均密度となる。水素原子1個の質量が$1.67\times10^{-27}$kgなので，これは，1m^{3}の宇宙空間に平均5.5個の水素原子が存在する程度の密度である。

宇宙の全質量は（⑬[R,ρ]）となり，$R=1.38\times10^{10}\times9.6\times10^{12}=1.3\times10^{23}$mを代入すると，$9.0\times10^{43}$kgとなる。太陽が$2.0\times10^{30}$kgなので，太陽$4.5\times10^{23}$個の質量に該当し，銀河系が太陽の$1.26\times10^{12}$倍の質量をもっているので，宇宙全質量は銀河系の$3.6\times10^{11}$倍の質量をもっていることになる。これにより全宇宙には3600億個程度の銀河があるといえる。

G045ハッブルの法則

(解説)

① 光速度cで周期Tだけ進む距離が波長なので　$\lambda_0 = cT$

② 物体が速さ v で遠ざかっているのでvTだけ波長が伸びている。$\Delta\lambda = vT$

③ ①より　$T = \dfrac{\lambda_0}{c}$。よって，$\Delta\lambda = vT = \dfrac{v}{c}\lambda_0$

④ $v = f\lambda$ より，　$f_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$

⑤ ④で波長が $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ となっているので，$f = \dfrac{c}{\lambda} = \dfrac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda}$

⑥ ③$\Delta\lambda = \dfrac{v}{c}\lambda_0$を⑤に代入して

$$f = \frac{c}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \frac{c}{\lambda_0 + \dfrac{v}{c}\lambda_0}$$

④より　$\lambda_0 = \dfrac{c}{f_0}$ を代入して　$f = \dfrac{c}{c+v}f_0$　　よって，$\dfrac{c}{c+v}$

⑦ 656.28nmが656.48nmになっているので0.20nmずれている。グラフで0.20nmのずれの位置を読み取ると，90km/s

⑧ 180km/sの後退速度の場合グラフより0.40nmのずれなので，

656.28＋0.40＝656.68nm

⑨ $D = HV = 4.6\times10^4\times3.0\times10^5 = 1.4\times10^{10}$光年

⑩ 運動エネルギーなので，　$\dfrac{1}{2}mv^2$

⑪ 万有引力による位置エネルギーなので，　$\dfrac{GMm}{r}$

⑫ $r = \sqrt{\dfrac{3}{8\pi G\rho}}\,v$ より，係数を読み取って　$\sqrt{\dfrac{3}{8\pi G\rho}}$

⑬ 質量は体積と密度の積なので，球の体積$\dfrac{4}{3}\pi R^3$に密度をかければよい。

$$\frac{4}{3}\pi R^3\rho$$