G044ペットボトルロケットの飛距離

1

　ペットボトルの中に水を入れて，内部の空気に高圧をかけると，その圧力でペットボトル内の水が噴き出す。その反作用を利用してペットボトルを飛ばすのがペットボトルロケットである。このロケットの飛距離を計算する方法に関して以下の文章の（①）～（⑫）の[　]に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を，[数値]とある場合は当てはまる式を入れよ。

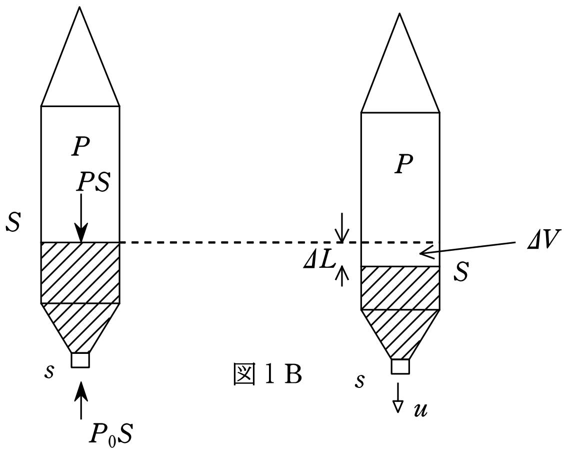


図１A　　図１B

＜噴射速度＞

　噴射した水の体積だけボトル内の気体の体積が増加するので，時間 $\varDelta t$ における水の噴射体積は体積の増加分 $\varDelta V$ で表される。ノズル（噴射口）の断面積を s，噴射の速さを u とすると，

$\varDelta V =$ （①[$s,u,\varDelta t$]）　　(i)

で表される。また，ボトル内の水の質量を m とする。噴射した水の質量 $\varDelta m$ は，水の密度を ρ とすると，

$\varDelta m =$ （②[$\rho,\varDelta V$]）　　(ii)

となる。ボトル内の水面の断面積を S とすると，図１Bの水面の降下量 $\varDelta L$ は $\varDelta L = \dfrac{\varDelta V}{S}$ となるので，ボトル内空気圧 P がした仕事 W_1 は，$W_1 = PS\varDelta L = P\varDelta V$ となり，外気圧 P_0 がした仕事 W_2 は噴射水が $u\varDelta t$ だけ噴き出してくるので，$W_2 = -P_0su\varDelta t = -P_0\varDelta V$ となる。

　この仕事の和 が水の運動エネルギーの増加分と等しくなる。ボトル内の水の運動エネルギーは噴射する水の運動エネルギーに対して無視できるので，これを0とする。水の運動エネルギーの増加分は噴射した水の運動エネルギー $K = \dfrac{1}{2}\varDelta mu^2$ と考えればよい。よって，（③[W_1,W_2,K]）となり，

$$(P-P_0)\varDelta V = \frac{1}{2}\varDelta mu^2$$

(ii)を用いて，噴射速度 u を求めると，

$$u=\sqrt{\frac{2(P-P_0)}{\rho}} \qquad \text{(iii)}$$

＜推進力＞

ペットボトル内の体積を V_0，内部の空気の体積を Vとする。ロケットが水噴射によって受ける力積は推進力をFとすると， 力積は$F\Delta t$となる。力積は運動量の差であり，運動量保存則から，ロケットの運動量の増加分は時間 Δtの噴射水の運動量の大きさ $u\Delta m$なので， $F\Delta t=u\Delta m$ となる。(i)(ii)を用いると推進力 F は

$$F=\rho s u^2 \qquad \text{(iv)}$$

となるが，ボトル内の水がすべて噴射された後は $F=0$ となる。

＜圧力変化＞

ペットボトル内の気体の状態方程式はボトル内の空気の物質量を n，気体定数を R，絶対温度を T，温度変化を ΔT と置くと，噴射前が， $PV=nRT$ で増加後は

$$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=nR(T+\Delta T)$$

となり，Δt を微小時間とすると， ΔP , ΔV 共に微小量となるので $\Delta P\Delta V=0$と置くことができる，　よって，

$$P\Delta V+V\Delta P=nR\Delta T \qquad \text{(v)}$$

が成立する。この変化は断熱変化と考えてよく，空気分子は二原子分子なので定積モル比熱 $C_v=\frac{5}{2}R$ である。よって， Δt が十分に短い時間であると考え，さらに微小時間なので P を一定であると考えれば，熱力学第一法則より

（④[$n,R,\Delta T$]） ＋ （⑤[$P,\Delta V$]） ＝ （⑥[数値]）　　(vi)

が成立する。(v),(vi)よりΔTを消去すると，

$$\Delta P=-\frac{7}{5}\frac{\Delta V}{V}P \qquad \text{(vii)}$$

＜空気抵抗＞

運動物体の空気抵抗力 F_D は，物体の速さを v，断面積を S，空気密度を d とすると，形状による定数（空気抗力係数という）を C_D とおくと，

$$F_D=\frac{1}{2}C_D d S v^2 \qquad \text{(viii)}$$

で表されることが知られている。

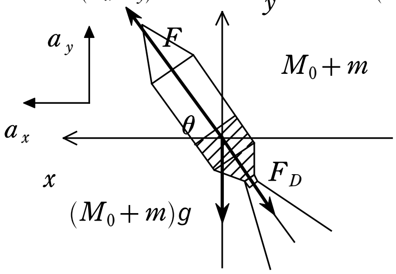
＜位置計算＞

時間 Δt の間に P が一定であるとして，V ,m , P 及び((i) ,(ii), (iii),(vii) 式を用いてu ,ΔV , Δm , ΔPを計算し，Δt 後のu , V ,m , P を計算する。これを繰り返すことにより，打ち上げ後の各時刻における u ,V ,m , Pが計算できる。そして，(iv)式により各時刻の推進力 F が計算され，(viii)とともに運動方程式を立てることにより，各時刻のロケットの加速度が計算できる。この加速度を用いて，ペットボトルロケットの軌道計算をすることができる。

発射地点を原点とし，打ち上げ方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸を取り，ロケットの位

置座標を $\vec{x}$ で表す。速度 $\vec{v}=(v_x,v_y)$ とし，加速度 $\vec{a}=(a_x,a_y)$ とする。

図２



推進力がF，空気抵抗が F_D，質量が M_0+m なので，運動方程式は

$(M_0+m)a_x=$（⑦[F,F_D,θ]）

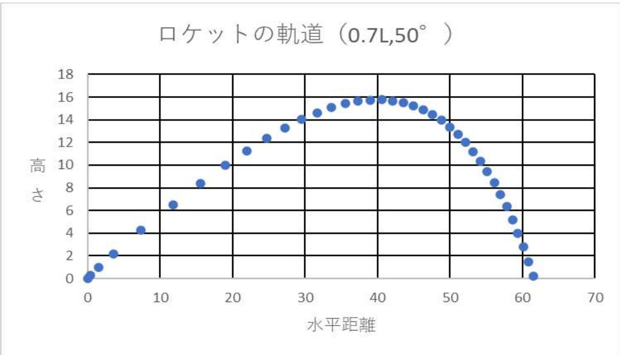
$(M_0+m)a_y=$（⑧[F,F_D,θ]） －（⑨[M_0,m,g]）

が成立する。これを解くと$\vec{a}$が求められる。

時間 Δt 後のそれぞれを ´ をつけて表すとし，その間に加速度が一定であるとすれば，$\vec{v}'=\vec{v}+\vec{a}\Delta t$，$\vec{x}'=\vec{x}+\vec{v}\Delta t$ が成立する。これらの式を用いて各時刻のロケットの位置を計算することができる。

初期値を $P=5.0\times10^5$Pa（5気圧）,$P_0=1.0\times10^5$Pa（1気圧）, $T=293$K, $S=0.0057\mathrm{m}^2$（直径0.085m）,$s=7.8\times10^{-5}\mathrm{m}^2$（直径10mm）, $M_0=0.055$kg, $m=0.70$kg,$V_0=0.0015\mathrm{m}^3$（1.5L）$\rho=1000$kg/m3, $C_D=0.50$，$\theta=50°$，　$g=9.8\mathrm{m/s}^2$を初期値として，EXELを用いて，ここまでに導いた式を利用して $\Delta t=0.01$s間隔でロケットの位置を計算して0.10sごとの位置をグラフにすると，図３のようになった。

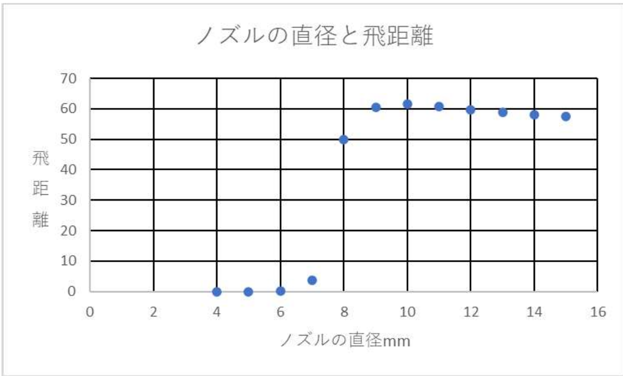
図３



噴射時間は0.37sで，3.72s後に61m先に落下するという結論に達した。実際に同じ条件で実験してみると60m程度の飛距離があったので，この計算結果はほぼ正確と判断してよい。最高点の高さは16mほどである。

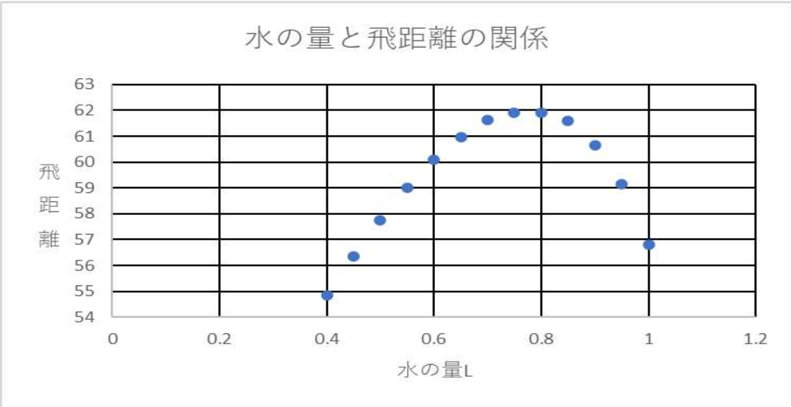
次に条件を色々と変えて，最大飛距離が出せる角度，水の量，ノズルの直径を計算してみた。まず発射角度50°，水の量0.70Lとし，ノズルの直径を色々と変えて飛距離を計算した結果が図４である。これによると，ノズルの直径が（⑩[数値]）mm以下ではロケットはほとんど飛ばないことが分かり，10mmのときが最大飛距離となっている。

図４



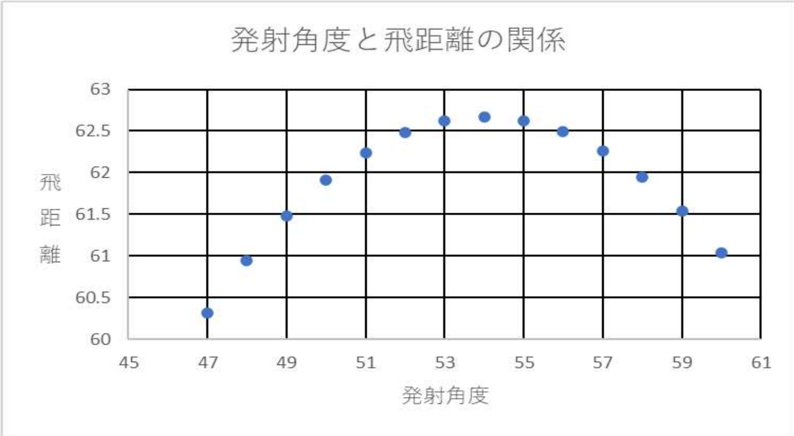
次にノズルの直径を10mmに固定してボトル内の水の量を変えて計算した結果が図５である。これによると，水の量が（⑪[数値]）Lのときに最大飛距離になることが分かった。

図５



次に水の量を（⑪）Lに固定して，発射角度を変えて計算した結果が図６である。

図６



　これによると，発射角度は（⑫[数値]）°のときが最大飛距離になることが分かった。ノズルの直径･水の量･発射角度はいずれも少し外れただけでは飛距離はほとんど変わらず，最大飛距離は62.6mほどとなることが分かった。

G044ペットボトルロケットの飛距離

(解説)

① ノズル（噴射口）の断面積を s，噴射の速さを u とするので，1秒間当たりの噴射体積は su となるので，時間 Δt では　$\Delta V = su\Delta t$

② 噴射質量Δmは，密度と噴射体積の積　$\Delta m = \rho\Delta V$

③ ボトル内空気圧 P がした仕事 W_1 は，$W_1 = PS\Delta L = P\Delta V$となり，外気圧 P_0 がした仕事 W_2 は噴射水が$u\Delta t$だけ噴き出してくるので，$W_2 = -P_0 su\Delta t = -P_0\Delta V$ となる。

この仕事の和 が水の運動エネルギーの増加分 $K = \frac{1}{2}\Delta m u^2$ と等しくなる。

$$W_1 + W_2 = K$$

これは，$P\Delta V - P_0\Delta V = \frac{1}{2}\Delta m u^2$ となる。$(P - P_0)\Delta V = \frac{1}{2}\Delta m u^2$ の式から逆に求めることもできる。

④ $C_v = \frac{5}{2}R$ なので，万能公式　$\Delta U = nC_v\Delta T$ に代入すると，　$\Delta U = \frac{5}{2}nR\Delta T$

⑤ 仕事なので　P が変化するが，ΔVが微小値なので P が変化してもよい。$W = P\Delta V$

⑥ 断熱変化なので，$Q = 0$

⑦ F と F_D の合力の x 成分なので

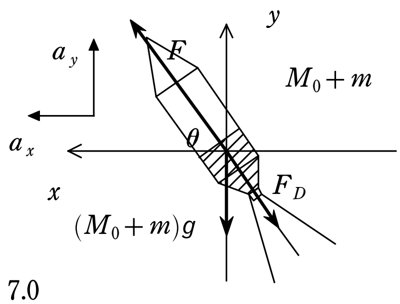
$(M_0 + m)a_x = F\cos\theta - F_D\cos\theta$

⑧ F と F_D の合力の y 成分なので

$F\sin\theta - F_D\sin\theta$

⑨ 重力なので，$(M_0 + m)g$

$(M_0 + m)a_y = F\sin\theta - F_D\sin\theta - (M_0 + m)g$



⑩ 図４より7.0以下では飛行距離はほとんどない。　7.0

⑪ 図５より　0.75～0.80　で最大となる。　0.80

⑫ 図６より，54°の時が最大飛距離となっている。