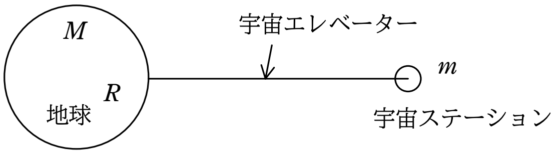
G040宇宙エレベーターの実現性

1

　地球上空に宇宙ステーションを作り，宇宙ステーションと地上との間に宇宙エレベーターを作る構想がある。その実現可能性について論じた以下の文章の（①）～（⑫）内の[　]で指定されている文字を用いた式を入れ，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。なお，数値データは問題文の最後にまとめてある。

図１



　地球質量を M，宇宙ステーションの質量を m とする。$M>>m$である。地球半径を R とし，宇宙ステーションの回転半径を r とする。地上の1点と宇宙ステーションを1本のケーブルでつなぐわけであるから，宇宙ステーションは地上のある点の上空に静止していなければならないので，静止衛星でなければならない。

　万有引力定数を G, 地球表面の重力加速度の大きさを gとし，自転の遠心力の影響を無視できるものとすると，万有引力（①[G,M,m,R]）が重力（②[m,g]）と等しくなるので，$GM=gR^2$ となる。

　宇宙ステーションの回転半径を uR と置くと，運動方程式は

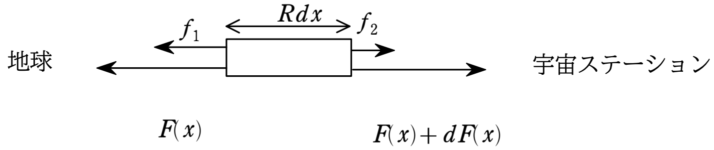
$$muR\omega^2 = （③[\ m,g,u\ ]） \qquad \text{(i)}$$

これを u について解き，$\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ を代入すると，$u=\dfrac{1}{R}\sqrt[3]{\dfrac{gT^2}{4\pi^2}}$ となる。数値データを代入すると，$u=6.61$で，地球半径の6.61倍の距離で静止衛星となる。実際の距離は $uR=4.22\times10^7$mでエレベーターの長さlは地球半径分を減じて $l=uR-R=3.58\times10^7$mとなる。地球表面一周の長さとほぼ同じである。

　まずは，1mm^{2}の断面積で $l=3.58\times10^7$mのケーブルをカーボンナノチューブで作り，1トンの物体（重力 $W_0=9.8\times10^3$N）を宇宙ステーションまで吊り上げることを考える。ケーブルに働く力は引き上げる物体の重力のほかにケーブル自身の重力と遠心力を考慮することにする。

　カーボンナノチューブで長さ l のケーブルを支えられるかどうかが問題となる。

図２



　地球中心から xR の位置のケーブルの微小な長さ $d(xR)=Rdx$ 部分に働く力を考えることにする。地球方面から受ける張力の大きさを $F(x)$，この部分より上の部分から受ける張力の大きさを $F(x)+dF(x)$ とすると，$dF(x)=$（④[f_1,f_2]）と表される。この部分の断面積を S, 密度をρとすると，質量が（⑤[ρ,S,R]）dx となるので，万有引力の大き

さ f_1 は f_1=（⑥[g,x]）×（⑤）dx， 遠心力 f_2 の大きさは（⑦[x,R,ω]）×（⑤）dx となる。よって，

$$dF(x)=\left(\frac{g}{x^2}-xR\omega^2\right)\cdot\rho SRdx \qquad \text{(ii)}$$

(ii)を１～ u の範囲で積分すればよい。これに，引き上げる物体の重力 W_0 を加えておくとよい。 W_0 を1トンの物体の重力とすると， W_0 ＝9.8×10³Nとなる。

$$F(u)=\int_1^u\left(\frac{g}{x^2}-xR\omega^2\right)\rho SRdx+W_0=\left\{gR\left(1-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}R^2\omega^2(1-u^2)\right\}\rho S+W_0$$

となる。ρ，S，ωの数値を代入し，kN（1kN＝10³N）単位とすると，

$$F(x)[\mathrm{kN/mm^2}]=81.3\left(1-\frac{1}{x}\right)+0.140(1-x^2)+9.80$$

これをグラフにしたのが図３である。

図３

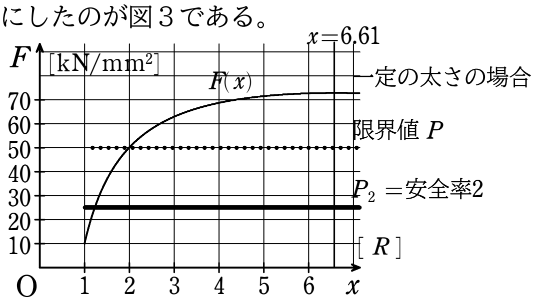


図３は一定の太さのケーブルを用いた場合の地心からの距離ごとのケーブル1mm²当たりにかかる張力，カーボンナノチューブのケーブルが切れる限界値，安全率２の場合の1mm²当たりの張力を示したものである。これを見ると， $F(x)$ では上空に行くほど大きな張力がかかり，宇宙ステーションの位置 x ＝6.61の位置が最大張力となっている。この張力の大きさは $F(6.61)$ ＝73ｋNである。

エレベーターのケーブルは非常に長いために断面積当たりの張力が非常に強い素材が必要となる。カーボンナノチューブは断面積1mm²当たり K_1＝50kN/mm²ほどまで耐えられると測定されている。一定の太さのカーボンナノチューブを用いると図３より，x＝（⑧[数値]）の位置で限界値を超えるため，ここでケーブルが切れてしまう。

宇宙エレベーターの張力はカーボンナノチューブ自身の重さによる影響が大きい，宇宙ステーションに近い部分で $F(6.61)$＝73kNであるが，地上付近では9.8kNである。張力が小さい部分で太いカーボンナノチューブを使う必要がなく，その部分を細くすれば，カーボンナノチューブ自身の重さによる影響を軽くできる。そのためには，カーボンナノチューブの断面積を張力に比例するものと考えればよい。1m²あたりにかかる力を一定値 P[Ｐa]とすると，(i)において，この場合の張力の大きさを $F_1(x)$ として， $P=\dfrac{F_1(x)}{S}$ と置くことができる。この式を用いて(i)式の S を消去すると，

$$dF_1(x)=\left(\frac{g}{x^2}-xR\omega^2\right)\cdot\rho\frac{F_1(x)}{P}dx$$

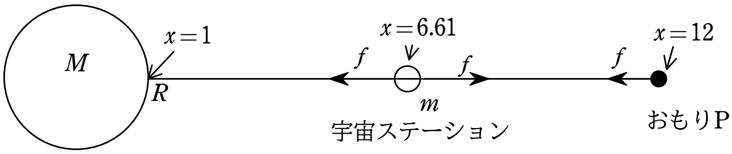
となり， $F_1(x)$ で割ると

$$\frac{dF_1(x)}{F_1(x)} = \left(\frac{g}{x^2} - xR\omega^2\right)\cdot\frac{\rho}{P}dx$$

この式は数Ⅲで習う対数積分を使うことにより，これを満たす $F_1(x)$ を求めることができる。 カーボンナノチューブは1.0×10^{-6}m²（1mm²）あたり K_1=50kNまで耐えられるので， P=50kN/mm²=5.0×10^{10}Paとなる。実際に運用するときは限界ぎりぎりにしておくと，破壊される可能性が高いので安全率を考える。瀬戸大橋のケーブルでは安全率２で設計されている。安全率２とは，限界値の $\frac{1}{2}$ まで荷重をかけるという意味である。この場合は断面積を2倍することになるので，安全率２における1m²あたりにかかる力 P_2 は P を $\frac{1}{2}$ 倍すればよく， P_2 =（⑨[数値]）kN/mm²となる。

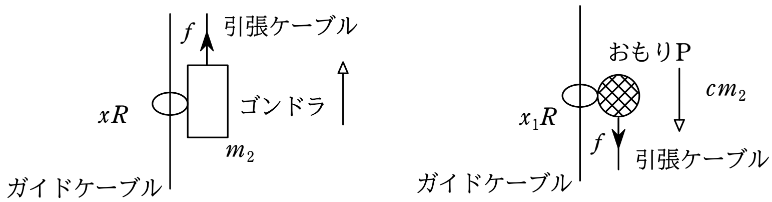
1トンの物体を支える場合で考えると， W_0 =9.8kNとなる。計算によると，x=6.61のときに最大張力 F_1(6.61)=122kNとなり，この位置（最も太い部分）でのカーボンナノチューブの断面積は4.9mm²となる。この場合も1mm²当たり，（⑨）kN/mm² となり，十分に耐えられることになる。このことより，宇宙エレベーターは理論的に可能であるという結論に達する。

しかし，この状態ではケーブルによる張力が宇宙ステーションを地球に引き寄せるように働くために，宇宙ステーションが地球に落下してしまう。



これを防ぐには，宇宙ステーションよりさらに上空におもりを取り付け，そのおもりの遠心力で下向きの張力を打ち消す必要がある。高度な計算によると x=12 の位置に2.58×10^5kg（258トン）の重りを取り付ければ宇宙ステーションに働く力は釣り合うことになる。しかし，以降は複雑化を避けるためにケーブルの質量は考えないものとする。

このケーブルをガイドケーブルとしてゴンドラを吊り上げる場合を考える。



宇宙ステーションの下ではゴンドラを引き上げ，上では同じ張力になるようにおもりPを引き下げる必要がある。ゴンドラの質量を m_2，位置が地心からの距離で xR とし，おもりPの質量を nm_2，Pの位置を地心から x_1R とする。そして，ともに同じ力 f で引張られているとする。ゴンドラ及びおもりの運動方程式は(i)と同様に

G040宇宙エレベーターの実現性

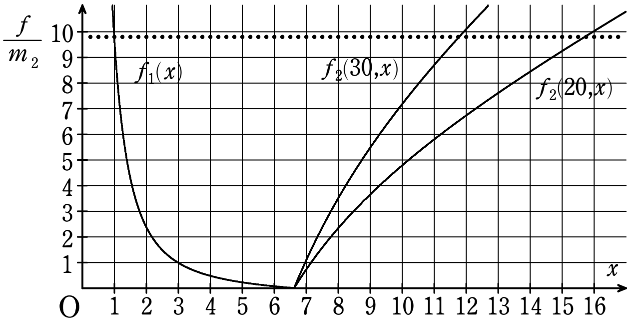
ゴンドラ　$m_2 xR\,\omega^2 = -f + \dfrac{gR^2 m_2}{x^2R^2}$　　$x<6.61$

おもり　$nm_2 x_1 R\,\omega^2 = f +$（⑩[$n, m_2 g, x_1$]）　　$x_1>6.61$

$$\frac{f}{m_2} = \frac{g}{x^2} - xR\,\omega^2 = n\left(x_1 R\omega^2 - \frac{g}{x_1{}^2}\right)$$

$$\frac{f}{m_2} = f_1(x) = \frac{9.8}{x^2} - 0.0337x \qquad f_2(n,x_1) = n\left(0.0337x_1 - \frac{9.8}{x_1{}^2}\right)$$

$n=20$と30の場合に関して，数値を代入してグラフにすると，



このグラフは物体（ゴンドラ･おもり）1kg当たりの張力を様々な高度に置いて示したものである。グラフ$f_1(x)$はゴンドラ1kg当たりの張力を意味し，グラフ $f_2(20,x)$，$f_2(30,x)$はゴンドラの質量の20倍，30倍の質量の重りを用いた場合，それぞれの重りの位置xでの釣り合わせるための張力を示している。 両者の張力が等しくなる位置におもりを移動すればよいことになる。例えば地表（ $x=1$）では $f_1(1)=9.8$を示しており，これと釣り合わせるためにはゴンドラの30倍の重りを使えば$x=$（⑪[数値]）の位置におもりを置く必要があり，20倍のおもりの場合 $x=$（⑫[数値]）の位置に置く必要がある。ケーブルを短くすることを考えると $n=30$ のほうが良いことになる。このグラフはゴンドラを等速で動かす場合の張力を示している。ゴンドラの位置が上昇するにつれ，張力が小さくなり，おもりの位置が下がってくるので，宇宙ステーションが重りとゴンドラのケーブル両方を巻き取るという形式で宇宙エレベーターが可能となる。さらにはゴンドラを加速する場合はおもりも加速する必要がある。

ただし，このゴンドラを動かすためのエネルギー源，保守点検，安全対策など実現のための課題は山積みである。

<数値データ>

$g=9.80\mathrm{m/s^2}$，$R=6.38\times10^6\mathrm{m}$，$T=8.64\times10^4[\mathrm{s}]$，$F(6.61)=6.30\times10^4\mathrm{N}$，$u=6.61$，

$\omega=7.27\times10^{-5}\mathrm{rad/s}$，$\rho=1.30\times10^3\mathrm{kg/m^3}$

G040宇宙エレベーターの実現性

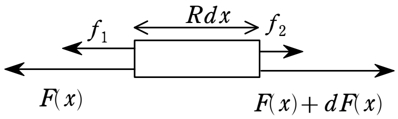
(解説)

① 万有引力の法則より $\dfrac{GMm}{R^2}$　　② 重力なので，mg

③ 運動方程式なので，$ma = muR\omega^2 = F$。Fは万有引力なので，万有引力の法則より $\dfrac{GMm}{(uR)^2}$。この式に $GM = gR^2$ を代入して $\dfrac{GMm}{(uR)^2} = \dfrac{gR^2m}{(uR)^2} = \dfrac{mg}{u^2}$

④

図２　地球



宇宙ステーション

図２における力のつり合いより，$F(x)+dF(x)+f_2 = F(x)+f_1$

式変形をすると，$dF(x) = f_1 - f_2$

⑤ 質量（m）＝密度（ρ）×体積（$SRdx$）＝$\rho SRdx$　dxは外に出ているので，ρSR

⑥ f_1は万有引力なので，$\dfrac{GMm}{(xR)^2}$。$GM = gR^2$ を代入し，$m = \rho SRdx$ なので，

$$f_1 = \frac{GMm}{(xR)^2} = \frac{gR^2m}{(xR)^2} = \frac{gR^2}{(xR)^2} \times \rho SRdx = \frac{g}{x^2}\rho SRdx$$

よって，$\dfrac{g}{x^2}$

⑦ f_2は遠心力なので $mr\omega^2 = (xR)\omega^2 \times m = xR\omega^2 \times \rho SRdx$　　よって，$xR\omega^2$

⑧ 図３で $F(x)$ が限界値 P ＝50kN/mm²に達しているのは x ＝2。よって，2

⑨ 安全率２なので，$P_2 = \dfrac{P}{2} = 25$　kN/mm²

⑩ おもりPに働く力は張力 f と万有引力である。よって，（⑩）は万有引力である。

万有引力＝$\dfrac{GMm}{(x_1R)^2} = \dfrac{gR^2m}{(x_1R)^2}$　　$m = nm_2$ なので，

$\dfrac{gR^2m}{(x_1R)^2} = \dfrac{gnm_2}{{x_1}^2}$　　よって，$\dfrac{gnm_2}{{x_1}^2}$

⑪ $f_1(1) = 9.8$と$f_2(30, x_1)$との交点の x を読む。　x ＝12

⑫ $f_1(1) = 9.8$と$f_2(20, x_1)$との交点の x を読む。　x ＝16

＜参考　数Ⅲの積分＞

$$\frac{dF_1(x)}{F_1(x)} = \left(\frac{g}{x^2} - xR\omega^2\right)\cdot\frac{\rho}{P}dx$$

積分して

$$\int\frac{dF_1(x)}{F_1(x)} = \int\left(\frac{g}{x^2} - xR\omega^2\right)\frac{\rho}{P}dx + \text{積分定数}$$

$$\log F_1(x) = \frac{\rho}{P}\left(-\frac{g}{x} - \frac{1}{2}x^2R\omega^2\right) + \text{定数}$$

$F_1(x) = $ 定数 $\times\ e^{\frac{\rho}{P}\left(-\frac{g}{x}-\frac{1}{2}x^2R\omega^2\right)}$　　定数 $= C$ と置くと

$F(1) = F_0 = C\,e^{\frac{\rho}{P}\left(-g-\frac{1}{2}R\omega^2\right)}$ なので，　$C = F_0\,e^{\frac{\rho}{P}\left(g+\frac{1}{2}R\omega^2\right)}$　　よって，

$F_1(x) = C\,e^{\frac{\rho}{P}\left(g-\frac{g}{x}+\frac{1}{2}xR\omega^2-\frac{1}{2}R\omega^2\right)}$　　$F_1(x) = F_0\,e^{\frac{\rho}{P}\left(g\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{2}R\omega^2\left(1-x^2\right)\right)}$