G036サッカーのキック

1

以下の文章はサッカーのキックについて述べたものである。文章中の（①）～（⑩）に[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を，[数値]とある場合は数値を答えよ。

インステップキックの足の速さとボールの速さの関係について考えてみよう。未経験女子A，未経験男子B，中堅選手C，大学サッカー選手D，プロサッカー選手Eの5人でデータ比較をしてみる。図１は各選手のインパクト直前の足のスイング速度[m/s]とボールの初速度[m/s]である。また，Fはプロサッカー選手の高速パスのデータである。

2

図１

選手	A	B	C	D	E	F
足のスイング速度V_0	11	13	14	18	20	8
ボールの速度v	14	18	20	26	30	10

図２

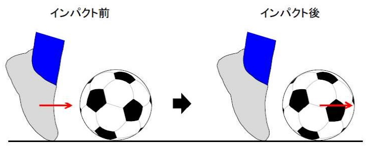
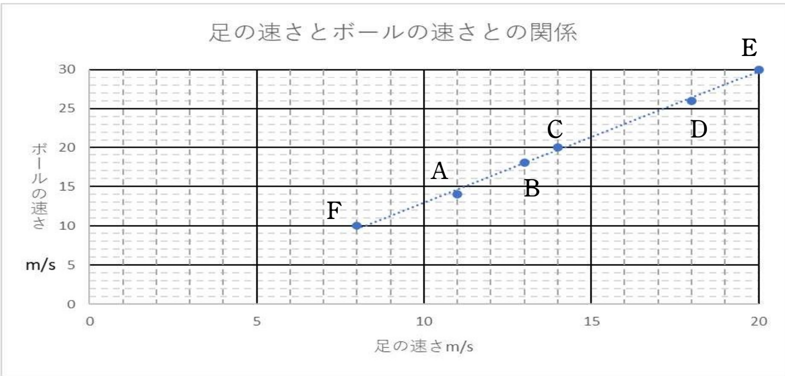


図３



このデータを図３のようにグラフ上に表すとほぼ一次関数になっていることが分かる。インパクト前の足が速いほどボールは速く飛んでいる。次にこれらの運動の詳細を調べてみよう。

ボールと足の反発係数を e とする。インパクト直前の足のスイング速度を V_0 とし，この状態で静止しているボールを蹴ると，蹴る直前の足に対する相対速度は（①[V_0]）でなので，蹴った直後の足に対するボールの相対速度は（②[e,V_0]）である。飛んでいくボールの速度を v とすると，蹴った後の足の速度 V は$V=$（③[e,v,V_0]）となり，蹴る前後での足の速さの比は $\dfrac{v-eV_0}{V_0}$ となっている。図４を見てわかる通り，上級者になればなるほどキック前後の足の速さの比が大きくなっており，キック後の足の速度が落ちていないのである。相対速度が決まっているので，インパクト後の足が速いほどボールは速く飛ぶ。

図４

選手	A	B	C	D	E	F
インパクト前後の足の速さ比	0.47	0.58	0.63	0.64	0.70	0.45
換算質量$M(kg)$	0.97	1.33	1.54	1.63	2.00	0.91

なぜ，インパクト前の足の速さが速いほど，インパクトによって足の速さが落ちないのだろうか？この謎を解くために，ボールの速度変化が同じになる足の質量 M を考えてみたいと思う。この質量は実際の足の質量と異なるので，この質量を換算質量と呼ぶことにする。ボールの質量を m とすると，運動量保存則より， $MV_0 =$ （④$[M,m,V,v]$） が成り立つ。この式より（③）を用いV を消去して M を求めると，

$M = \dfrac{mv}{(1+e)V_0 - v}$ となる。 足とボールの反発係数 e=0.80， m =0.40kgとして，A～Fのそれぞれについて M の値を求めると図４のようになる。この図を見るとわかるように上級者になるほど足の換算質量が大きいのである。実際の足の質量が変化するとは思われないので，この現象は足に体重が乗っている状態と解釈できる。

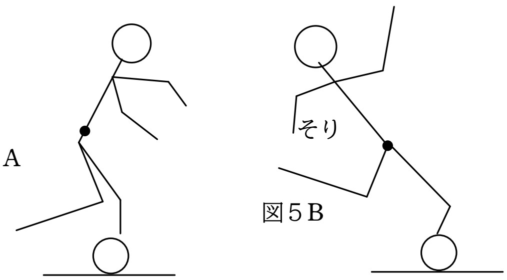


図５A　図５B

図５に体重が乗っているBと乗っていないAのインパクト前の体形を示している。黒点が腰（重心）の位置を示している。BのほうがAより腰が前に出ている。腰が先に動くと足と重心が一体化して足に体重が乗りやすくなると考えられる。足に体重が乗らない場合インパクトの瞬間ボールの反動を受けて足の速度が落ちるが，体重が乗っている場合は蹴った直後の足の速度が落ちないと考えられる。

次にパスについて考えてみよう。パスするときのボールの速さは高速パスで10m/sであるとする。選手Pが選手Qに高速パスをする場合を想定する。P→Qの向きを正とし，P,Qは体格技量ともに同じであるとする。

選手Pが静止しているボールを蹴る時（図６A），足のスイング速度は図１より8.0m/sである。よって，蹴った後の足の速度は，（③）より，3.6m/sとなる。

この時，ボールが受けた力積は，ボールの運動量変化より（⑤[数値]）Nsとなる。足は－（⑤）Nsの力積を受けて速さが8.0m/sから3.6m/sに4.4m/sだけ減速する。

一方パスを受ける選手Qの方は，10m/sで飛んできたボールを止めなければならない。この時（図６B），ボールが足から受ける力積は蹴る時と同じ大きさの力積で－（⑤）Nsである。足は（⑤）Nsの力積を受けるので，蹴る場合に減速した速度と同じ速度だけ加速することになる。Qがボールを受ける前の足の速度を u [m/s]とすると，ボールを止め

た後（図６C）の足の速度は（⑥[u]）となる。ボールを受ける前のボールと足の速度差は（⑦[u]）なので，この0.80倍が止めた後の速度差になる。よって，

0.80×（⑦）＝（⑥）

の方程式が成立する。この方程式を解くと u ＝（⑧[数値]）m/sとなる。

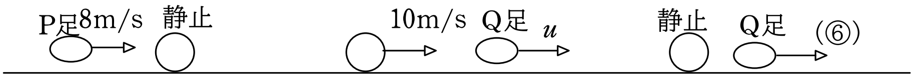
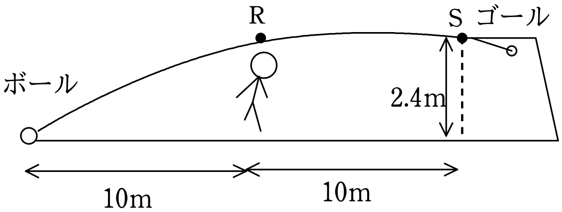


図６A　図６B　図６C

パスを受けるときはボールと同じ方向に（⑧)m/sで足を動かし，ボールと接触させると，ボールを止めた後の足の速さが6.4m/sとなり，ボールを止めることができる。

次にフリーキックの場合を考えてみよう。図７のようにゴール手前20mの位置で直接フリーキックのチャンスを迎えた。相手チームはゴールの手前10mのところに壁を作って防御を図ったと想定する。

図７



キッカーは壁になった相手選手の位置で頭上をわずかに超える位置R（高さ h ）を通過し，ゴールの最上端Sより，ゴールに入るとする。このボールをインステップキックで蹴る場合を考えてみよう。

重力加速度の大きさを10m/s²とし，蹴った直後のボールの初速度の水平方向成分を v_{0x}，鉛直成分を v_{0y} とする。蹴ってからゴールするまでの時間を t とすると，

$v_{0x}t=20$　　(i)

$2.4=v_{0y}t-$（⑨[t]）　　(ii)

R点に達する時刻は（⑩[t]）なので，

$h=$（⑪[v_{0y}, t]）　　(iii)

(i)(ii)(iii)を計算すると，

$$v_{0x}=10\sqrt{\frac{5}{h-1.2}} \qquad v_{0y}=0.12\,v_{0x}+\frac{100}{v_{0x}} \qquad t=\frac{20}{v_{0x}}$$

初速度の大きさを v_0 は， $v_0=\sqrt{{v_{0x}}^2+{v_{0y}}^2}$。蹴る角度を$\theta$とすると， $\tan\theta=\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$ （大学ではこの式を　$\theta=\mathrm{Arctan}\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}$ と表す）より，

$v_0 = \sqrt{20h + \dfrac{505}{h-1.2}}$ ，$\theta = \mathrm{Arctan}(0.2h - 0.12)$，　$t = 0.89\sqrt{h-1.2}$

これらの式を用いて壁の超える位置の高さ h ごとの v_0[m/s]，θ[°]，　t[s]をグラフにしたのが図８である。

図８

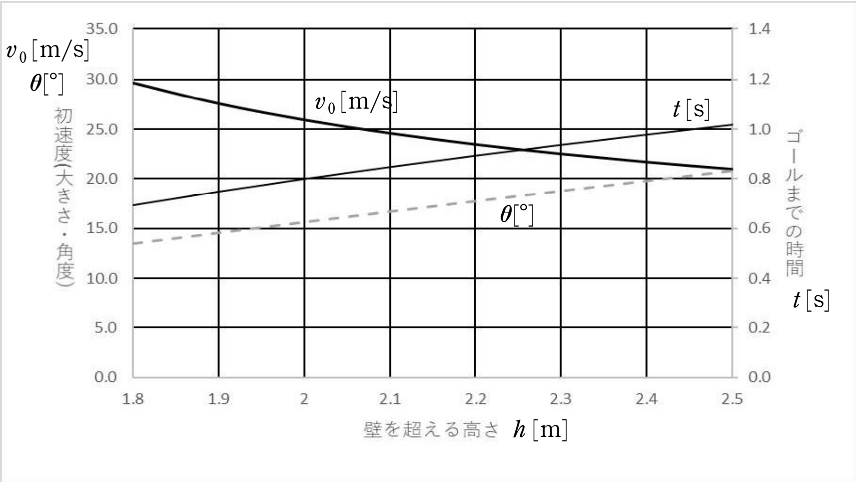


図８では v_0[m/s]，θ[°]は左側の縦軸目盛りを用い，　t[s]は右側の縦軸目盛りを用いている。図８によると，壁の位置での高さ h を低くしたほうがボールは速く，高くするほどゴールまでの時間がかかることになる。壁になる人のジャンプのタイミングを外せば，低く蹴り，外せなければ高く蹴るほうが良いことになる。

Rの高さ h =2.1mのボールを蹴ろうとすると，ボールの初速度が16°の方向に（⑫[数値]）m/sとなるので，足の速さは18m/sほど必要となる。よって，このフリーキックを成功させるには中堅選手Cでは無理で上級選手D,Eの実力が必要となる。

G036サッカーのキック

(解説)

① 相対速度は相手の速度－自分の速度である。
　相手（ボール）0m/s　と自分（足）V_0 より，$0-V_0=-V_0$

② 反発係数は衝突前後の速さの比であるので，衝突後の速さはeV_0 となる。
衝突後はボールのほうが足より速いので相対速度は正となる。よって，　eV_0

③ 足の速度はボールの速度 v より eV_0 小さいので，　$v-eV_0$

④ 足の運動量 MV とボールの運動量 mv の和　$MV+mv$

＜$M=\dfrac{mv}{(1+e)V_0-v}$の算出＞

相対速度　$V=v-eV_0$　　　運動量保存則　$MV_0=MV+mv$

より，　$MV_0=M(v-eV_0)+mv$

これは，　$M(V_0-v+eV_0)=mv$　となるので，

$$M=\frac{mv}{(1+e)V_0-v}$$

⑤ 静止していたボールが10m/sで移動するので，運動量0kgm/s→0.40×10kgm/sとなるので，運動量変化は　4.0－0＝4.0Ns　となる。

⑥ Pが蹴ったときの足は4.4m/sだけ遅くなっている。Qがボールを受けたとき，同じ大きさの力積を受けるので速度変化は同じである。よって，4.4m/sだけ速くなる。$u+4.4$

⑦ ボールの速度10m/sで，足の速度が u なので，速度差は　$10-u$

⑧ $0.80(10-u)=u+4.4$
　これを解くと　$u=2.0$m/s

⑨ $x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$　より　（⑨）は $\dfrac{1}{2}at^2$ に該当する部分である。

$$\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 10t^2=5t^2$$

⑩ 水平距離が10mの位置なので，20mの半分である。水平方向の速度は一定なので，
　時間も半分となる。　$\dfrac{t}{2}$

⑪ (ii)式の t に $\dfrac{t}{2}$ を代入するとよい。$h=v_{0y}\left(\dfrac{t}{2}\right)-5\left(\dfrac{t}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}v_{0y}t-\dfrac{5}{4}t^2$

＜v_0,θ,t の算出＞

$v_{0x}t=20$　　(i)

$2.4=v_{0y}t-5t^2$　　(ii)

R点に達する時刻は $\dfrac{t}{2}$ なので，

$h=\dfrac{1}{2}v_{0y}t-\dfrac{5}{4}t^2$　　(iii)

(i)より，　$t=\dfrac{20}{v_{0x}}$　　(iv)

(ii)に代入して　$2.4 = v_{0y}\left(\frac{20}{v_{0x}}\right) - 5\left(\frac{20}{v_{0x}}\right)^2$

v_{0x} をかけて　$2.4v_{0x} = 20v_{0y} - \frac{2000}{v_{0x}}$

これより，　$v_{0y} = 0.12\,v_{0x} + \frac{100}{v_{0x}}$　　(v)

(iii)に(iv),(v)を代入して

$$h = \frac{1}{2}\left(0.12v_{0x} + \frac{100}{v_{0x}}\right)\left(\frac{20}{v_{0x}}\right) - \frac{5}{4}\left(\frac{20}{v_{0x}}\right)^2$$

簡単にして　$h = 1.2 + \frac{500}{{v_{0x}}^2}$　　よって，$v_{0x} = 10\sqrt{\frac{5}{h-1.2}}$　　(vi)

初速度の大きさを v_0 は，$v_0 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2}$。蹴る角度を$\theta$とすると，$\tan\theta = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}$（大学ではこの式を　$\theta = \mathrm{Arctan}\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ と表す）より，

$v_0 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + {v_{0y}}^2}$ に(v)を代入して

$$v_0 = \sqrt{{v_{0x}}^2 + \left(0.12v_{0x} + \frac{100}{v_{0x}}\right)^2} = \sqrt{1.144{v_{0x}}^2 + 24 + \frac{10000}{{v_{0x}}^2}}$$

(vi)を代入して

$$v_0 = \sqrt{1.0144\frac{500}{h-1.2} + 24 + \frac{10000}{500}(h-1.2)} = \sqrt{20h + \frac{505}{h-1.2}}$$

$\theta = \mathrm{Arctan}\frac{v_{0y}}{v_{0x}}$ に(v)(vi)を代入して

$$\theta = \mathrm{Arctan}\left(0.12 + \frac{100}{{v_{0x}}^2}\right) = \mathrm{Arctan}(0.12 + 0.2h - 0.24) = \mathrm{Arctan}(0.2h - 0.12)$$

(iv)より，

$$t = \frac{20}{v_{0x}} = \frac{20}{10\sqrt{\frac{5}{h-1.2}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{h-1.2} = 0.89\sqrt{h-1.2}$$

⑫　図８で $h=2.1$ における v_0 の値を読めばよい　24m/s