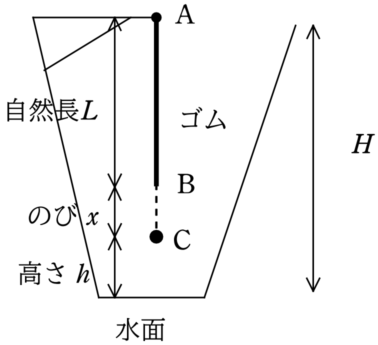
G031バンジージャンプ

1

　ある峡谷にバンジージャンプの遊戯施設を建設しようと計画された。以下の文章の（①）～（⑮）の[　]内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を，[数値]と指定されている場合は当てはまる数値を入れよ。ただし，この運動に関して，ゴムはフックの法則に従うものとし，空気抵抗･ゴム自体の質量･ゴムの内部摩擦は考えないものとする。【思】

　H[m]の深さの谷がある。この谷にバンジージャンプ施設を作ろうと思う。バンジージャンプとは，上端Aにある施設からゴムを体に取り付け谷に向けて飛び降りるスポーツである。ある位置からゴムが伸び始め，跳び降りた人が水面に到達する直前にゴムの弾性力によって引き戻される必要がある。

図 1



　この施設の設計条件として以下の二つが検討された。（空気抵抗の影響は無視して考えるものとする）

(1)　この施設の体重制限を 100kgとする。 100kgを超える人が飛び降りると水面に激突するので100kg以下の人を対象とする。

(2)　最下点が最大加速度となるが，大きな加速度が人体にかかると危険なので，体重100 kgの人の最大加速度を3Gとする。（Gは重力加速度を基準とする単位で3Gとは重力加速度の3倍を意味する。）

　これより，この施設で使うゴムの長さとゴム定数（ばね定数）を計算してみよう。体重m[kg]の人がA点より飛び降りる場合を考える。重力加速度の大きさ g[m/s^2]とし，この人が飛び降りたときに水面すれすれが最下点であること。その時の加速度の大きさが3Gであるようにすると，それ以下の体重の人は安全に飛び下りられる。ゴムの自然の長さをL[m]，ゴム定数をk[N/m]として考える。以降ベクトルはすべて上向きを正とする。

　A点より質量 m の人が初速度0で飛び降り，ゴムが自然長に達したB点を通過し，ゴムが x 伸びた位置であるC点に達した場合を考える。C点の水面からの高さを h とする。この人に働く重力の大きさ W は W =（①[m,g]）である。水面を重力による位置エネルギーの基準としたとき，飛び降りた直後，この人の水面を基準とした重力による位置エネルギーはmgH である。初速度は0なので，A点での力学的エネルギーの和は mgHとなる。

G031バンジージャンプ

C点における重力による位置エネルギー U_h は U_h ＝（②[m,g,h]） で，速さを v とすると運動エネルギー K は K ＝（③[m,v]） である。このときゴムの伸び x は x=（④[H,L,h]） で表される。ばねの弾性力 f は， f ＝（⑤[k,x]）となる。加速度を a として運動方程式を立てると，

$$ma = \text{（⑥[} W,f \text{]）} \qquad \text{(i)}$$

この瞬間のゴムによる位置エネルギー U_k は，ばねによる位置エネルギーと同じ式を用いることができるので， U_k ＝（⑦[k,x]）となる。その結果A点とC点における力学的エネルギー保存則は，

$$\text{（⑧[} K,U_h,U_k \text{]）} = mgH \qquad \text{(ii)}$$

となる。ここで，体重100kgの人の水面ギリギリにおける条件， H＝100m， m＝100kg， g＝10m/s^2， h＝0ｍ ,a ＝3G＝30m/s^2,v＝0ｍ/s として(i)(ii)を連立させて解くと，L=50 m，k=80N/mとなる。この条件を満たすゴムを設置すれば目的が達成できる。

m＝100kg,H＝100ｍ,g＝10 m/s^2 , k＝80N/m, L ＝50mとすると，ゴムが自然長になるまでは自由落下なので，ゴムの弾性力による位置エネルギーは0である。運動エネルギーを K とすると高さが h（ $h>50$） のときの(ii)は

$$K + 1000h = 1.0\times10^5 \qquad (\ h>50)$$

となる。 $h<50$ のときはゴムの弾性力による位置エネルギー U_k が存在するので（ii）は

$$K + 1000h + 40(50-h)^2 = 1.0\times10^5 \qquad (\ h<50\ )$$

となる。これをグラフにしたのが図２である。

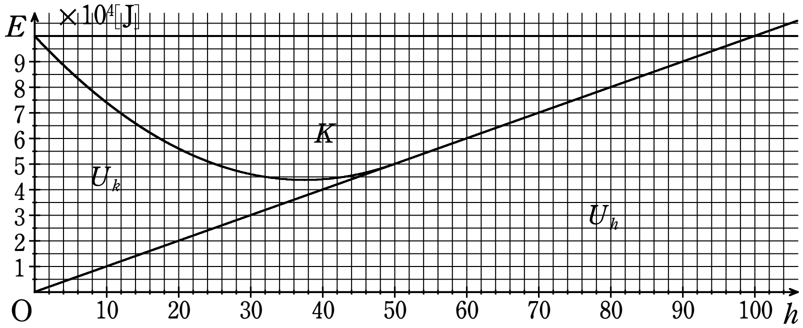


図２

図２において K が運動エネルギーを示し， U_k がゴムによる位置エネルギーを示し，U_h が重力による位置エネルギーを示している。その総和は常に一定で1.0×10^5[J]である。Kの領域が0になっている高さが最下点で，最大になっている高さ（放物線の頂点）が最高速度になっていることを示している。空気抵抗により力学的エネルギーが失われれば，図２におけるE＝1.0×10^{5}Jのラインが下に下がってくる。ライン下の K の領域の範囲でジャンパーは振動し， K の領域がなくなったときに静止する。

次にこのゴムを使って体重60kgの人がバンジージャンプをするとどうなるであろうか(ii)式の m＝100 をにm ＝60に変換すると，

$$K + 600h + 40(50-h)^2 = 6.0\times10^4 \qquad \text{(iii)}$$

これを図２と同じようなグラフにすると，図３のようになる。

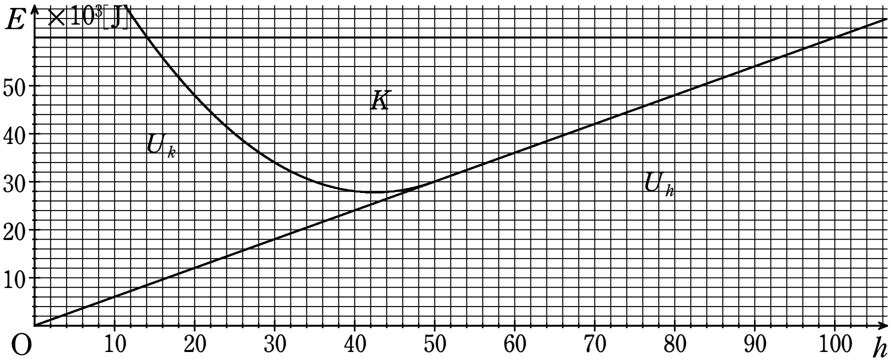
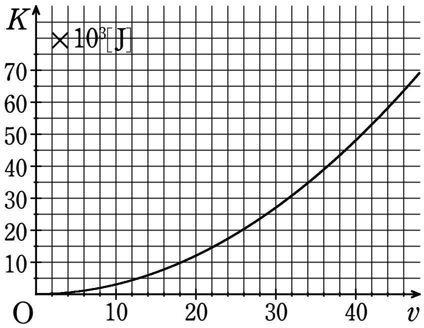
図３


図３のグラフから判断してこの人がバンジージャンプをすると，最下点は水面上（⑨[数値]）mの位置で，最高速度に達するのは水面上（⑩[数値]）mの位置となることが分かる。

図４は体重60kgの人の運動エネルギーと速さの関係を示したものである。

図４


これを見るとこの人のバンジージャンプの最高速度は（⑪[数値]）m/sであることが分かる。

$h<50$ における運動方程式(i)に

$m=60\,\mathrm{kg}$, $k=80\,\mathrm{N/m}$, $x=50-h$, $g=10\ \mathrm{m/s^2}$, $L=50\,\mathrm{m}$を代入すると

$$a=\frac{4}{3}(50-h)-10 \qquad \text{(iv)}$$

$h>50$ のときは重力加速度で落下するので， $a=-10\ \mathrm{m/s^2}$ これをグラフにすると，図５のようになる。

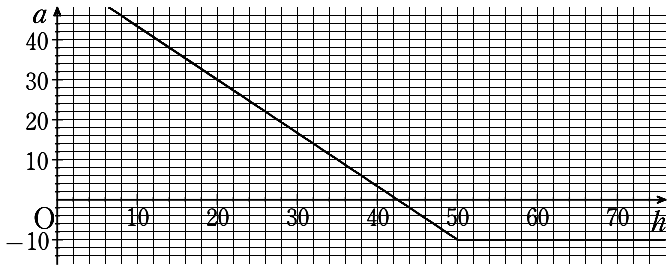
図５


図５によると，この人の最大加速度は（⑫）m/s²となる。理論上はエネルギーが保存されるので最下点に達した後，出発点にまで戻り，同じ運動が永久に繰り返される。とこ

ろが，実際は空気抵抗やゴム内部の摩擦により次第にエネルギーが失われ，最終的には高さ（⑬[数値]）mの位置で静止する。静止後，回収されることになる。

バンジージャンプのゴムは1本のゴムを用いて作るのではなく，断面積1mm²のゴムを何本か束ねて作っている。何本のばねを束ねる必要があるのだろうか。

長さ1m，断面積1mm²のゴムのゴム定数は2.0N/mであるとされている。ゴムの長さが2倍になると，同じ力でゴムを引いたときにゴムの伸びが2倍となるので，ゴム定数は $\frac{1}{2}$ となる。このことからゴム定数はゴムの長さに反比例することが分かる。よって，長さ50m，断面積1mm²のゴムのゴム定数は（⑭[数値]）N/mとなる。k=80N/mなので，断面積1mm²のゴムを（⑮[数値]）本束ねる必要がある。

解説

① 重力なので， mg

② 運動エネルギーなので，$\frac{1}{2}mv^2$

③ 重力による位置エネルギーなので，mgh

④ 図１より x は $H-L-h$

⑤ ばねの弾性力なので，kx

⑥ 運動方程式の ma は質量のベクトル和である。
上向きを正としているので $f-W$

⑦ ばねの弾性力による位置エネルギーなので， $\frac{1}{2}kx^2$

⑧ エネルギー保存則なので，運動エネルギーと重力による位置エネルギーとゴムの弾性力による位置エネルギーの和 $K+U_h+U_k$

⑨ 図３のグラフにおいて運動エネルギー K が0になっている位置で静止している。最下点では運動エネルギーが0になる。 h =14m
<別解>
$K + 600h + 40(50-h)^2 = 6.0\times10^4$ (iii)
$K=0$ と置くと (iii)は二次方程式となる。

$15h+(50-h)^2=1500 \quad \rightarrow \quad h^2-85h+1000=0$

$h=\dfrac{85\pm\sqrt{85^2-4000}}{2}$ ＝14.1m,70.9m　70.9mは該当しないので14m

⑩　最高速度に達したとき運動エネルギーが最大となっている。図３のグラフにおいて K の領域が最も広くなっている位置である。 $h=43$m

＜別解１＞

(iii)より，　$K=6.0\times10^4-600h-40(50-h)^2$

平方完成すると　$=-40h^2+3400h-40000=-40\left(h-\dfrac{85}{2}\right)^2+32250$

$h=\dfrac{85}{2}=42.5\fallingdotseq43$m

＜別解２＞

$K=6.0\times10^4-600h-40(50-h)^2$　より，　$\dfrac{dK}{dh}=-600+80(50-h)=0$

これを解くと　$h=\dfrac{85}{2}$

⑪　$h=43$mの位置での K の領域のエネルギーは28×10^3Jである。全体のエネルギーが60×10^3Jなので，この位置における位置エネルギーは32×10^3Jとなる。図４のグラフでこの運動エネルギーとなっている位置の速度は　33m/s

＜別解＞

⑩より，運動エネルギーの最大値は32250J

$\dfrac{1}{2}\times60\times v^2=32250 \quad \rightarrow \quad v=32.8\fallingdotseq33$m/s

⑫　$h=14$mの位置が最下点なので，この位置の加速度を図５のグラフで見ると39m/s^2

＜別解＞

(iv)式　$a=\dfrac{4}{3}(50-h)-10$　　に⑨の答え　$h=14.1$mを代入すると，

$a=37.9\fallingdotseq38$m/s^2

⑬　図５で加速度＝0となっている位置で静止する。　$h=43$m

＜別解＞　図３で運動エネルギー K が最大となっている位置と一致しているので，⑩と同じ答え

⑭　ゴム定数は長さに反比例する。長さが50倍になっているのでゴム定数は $\dfrac{1}{50}$

よって，$2.0\times\dfrac{1}{50}=0.040$N/m

⑮　ゴムが2本になるとゴム定数は2倍になり，ゴムの本数とゴム定数は比例している。

0.04N/mは80N/mの $\dfrac{1}{2000}$ なので，本数は2000本