

1

ヘリコプターの浮上原理について述べた下の文章に関して、最後の1～3の問いに答えよ。【思考力】

ヘリコプターの浮上原理について考えてみよう。図1はヘリコプターを図示したものである。上部の回転翼はメインローターと呼ばれ、このメインローターを回転させて浮上している。

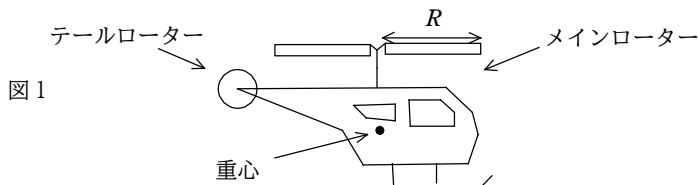


図1のように $AB=L$, $BC=R$ の薄い板 $ABCD$ を進行方向から角度 θ 傾けて一定の速さ v で平行移動(並進運動)させる場合を考える。空気分子はすべて静止状態にあり、分子同士の衝突、分子間力は考えないものとする。また、板と空気分子は完全非弾性衝突し、空気密度を ρ とする。

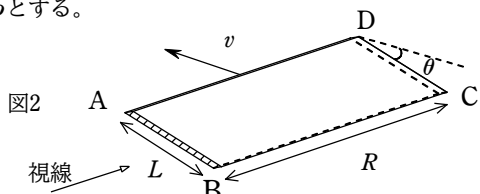


図2を視線方向から見た図が図3である。

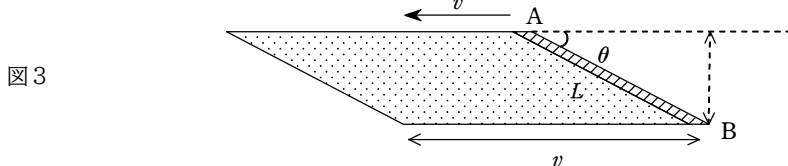


図3において板 $ABCD$ が左方向に速さ v で移動した時、 \square 部の空気がこの板に衝突することになる。単位時間(1s)に板に衝突する空気の体積 V は $V=(①[R,v,L\theta])$ であらわされる。よって、単位時間に板に衝突する空気の質量 m は $m=(②[\rho,V])$ となる。

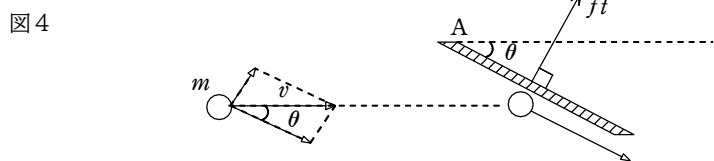


図4のように静止している角度 θ 傾いた板 $ABCD$ に質量 m の物体 P が完全非弾性衝突したとしてこの板にはたらく鉛直上向きの力(揚力)を求めてみよう。このとき、板が物体 P から受ける力積の大きさを ft とする。物体 P は板と完全非弾性衝突するので、衝突後の物体 P は板に沿って滑ることになる。このとき、板と物体 P の間は滑らかであるとする。

物体 P の速度 v の板と垂直な方向成分は $(③[v,\theta])$ となり、衝突後は0になるので、板が物体 P から受ける力積 ft は $ft=(④[m,v,\theta])$ となる。この物体 P は1s間に板に衝突する空気と考えているので、この力積はそのまま力となる。この力の鉛直成分が板 $ABCD$ に働く揚力 f となる。 $f=(⑤[ft,\theta])$ とあらわされる。

この時の薄い板 $ABCD$ を2枚用意し、メインローターとして取り付けた場合を考えてみよう。この時、板 $ABCD$ は回転運動をすることになる。回転運動の場合回転中心からの距離により回転速度が異なる。メインローターの回転中心からの距離を r 、角速度を ω とすると、その部分の回転速度は $(⑥[r,\omega])$ であらわされる。並進運動と回転運動は揚力が異なるが、メインローターの回転半径を R として高度な計算をすると、 $r=\frac{R}{\sqrt{3}}$ の位置

の回転運動の速さと同じ速さで並進運動させると回転運動した場合と同じ大きさの揚力になる。これによりこの回転運動と同じ揚力を持つ並進運動における速度 v は $v=\frac{R\omega}{\sqrt{3}}$ であらわすことができる。よって、ヘリコプターのメインローター1枚当たりの揚力 f は

$$f = \frac{1}{3} \rho R^3 \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta$$

となる。2枚ローターの場合の揚力 F は $F = \frac{2}{3} \rho R^3 \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta$ である。

ヘリコプターが上昇したり空中で静止したりするには揚力を変化させる必要があるが、角速度 ω を変化させるのではなく、ピッチ角 θ を変化させることで揚力を変化させている。関数 $y = \sin^2 \theta \cos \theta$ をグラフおよび表にしたのが図5である。

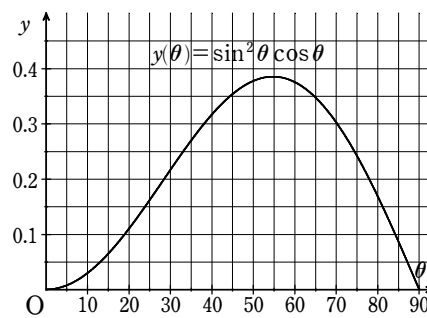
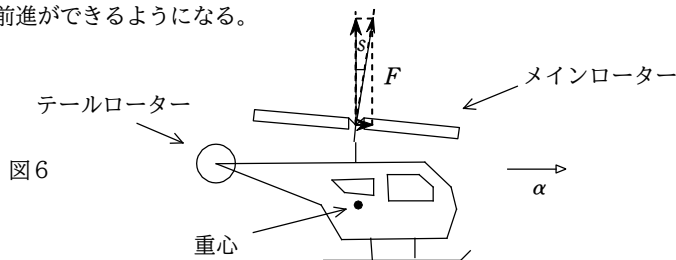


図5

θ°	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$\sin^2 \theta \cos \theta$	0.09	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18

今質量 M のヘリコプターがホバーリング(空中静止)していた。重力加速度の大きさを g とすると、このヘリコプターに働いている重力の大きさは $(⑦[M,g])$ であり、このときのローターによる揚力の大きさは $(⑧)$ となる。この時ピッチ角 $\theta=19^\circ$ であった。上昇するためにピッチ角を 21° に変更すると、ローターによる揚力が $(⑨[\text{数値}]) \times Mg$ となり、運動方程式を立てて解くことにより上昇加速度は $(⑩[\text{数値}]) \times g$ となる。

この状態ではヘリコプターは上下運動しかできないが、メインローターを傾けることにより前進ができるようになる。



このヘリコプターのメインローターを前方へ角度 s 傾けて、水平前方へ加速度 α で加速することを考える。揚力 F を用いた水平方向の運動方程式は $M\alpha = (⑩[F,s])$ であらわされ、鉛直方向のつり合いの式は $Mg = (⑪[F,s])$ である。これを数値計算し、横軸がピッチ角の増加分 $\Delta\theta^\circ$ で縦軸が水平方向の加速度 $\alpha[m/s^2]$ を示したのが図7で、横軸を加速度 $\alpha[m/s^2]$ 、縦軸をローターの傾き角 $s[^\circ]$ であらわしたのが図8である。このグラフによると加速度 $2.0m/s^2$ で水平方向に加速するには、ローターを $s = (⑫[\text{数値}])^\circ$ 傾けて、ピッチ角 θ を $(⑬[\text{数値}])^\circ$ 増加させればよいことがわかる。このようにヘリコプターはごくわずかにピッチ角を変更することにより、上昇・下降・静止・前進・後退が自在にできるのである。

最近よく使われているドローンも基本原理は同じである。

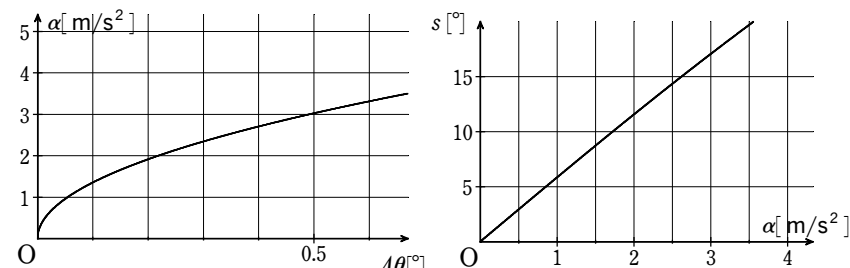


図7

図8

- (①)～(⑬)に[]内に示された文字を用いた当てはまる式を入れよ。[数値]とある場合は当てはまる数値を有効数字2桁で解答せよ。
- テールローターは何のためにあるのか。「反作用」、「逆回転」という用語を用いて簡単に説明せよ。
- このヘリコプターが前進すると、空気に対するメインローターの相対速度がヘリコプターの進行方向の左右で異なることになり、左右で揚力差が生じて墜落する。これを防ぐにはどうしたらよいと思うか。「ピッチ角」という用語を用いて簡単に説明せよ。

【解説】

- 空気の体積は $V = RvL\sin\theta$
- 質量は $m = \rho V$ $m = \rho RvL\sin\theta$
- 速度の板と直角方向成分は $v \sin\theta$
- 力積は $ft = m v \sin\theta$
- 1s間の力積なのでこれは力となる。揚力はこの力の鉛直成分なので、
 $f = ft \cos\theta = m v \sin\theta \cos\theta = \rho Rv^2L \sin^2\theta \cos\theta$
- 回転速度は $r\omega$

< $v = \frac{R}{\sqrt{3}} \omega$ となる理由 積分あり >

角速度 ω で回転しているローターの揚力と並進運動の揚力が同じになるようにするには、回転半径 x の揚力が $\rho Rv^2L \sin^2\theta \cos\theta$ となる x を求めればよい。

G015ヘリコプターの浮上原理

$v = x\omega$ なので, $x \sim x+dx$ の部分の揚力 df は

$$df = \rho x^2 \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta dx$$

これを $0 < x < R$ で積分すると,

$$f = \int_0^R \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta x^2 dx = \frac{R^3}{3} \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta$$

となる。

$$\frac{R^3}{3} \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta = \rho R v^2 L \sin^2 \theta \cos \theta$$

なので, $v = \frac{R}{\sqrt{3}} \omega$

となり, $x = \frac{R}{\sqrt{3}}$ の位置の回転速度と同じ揚力となる。

2枚ローターの場合, 揚力は $\frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta$

これがホバーリングしている時重力 Mg と釣り合っているので

$$\frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta = Mg$$

が成立する。

- ⑦ Mg
- ⑧ $\theta = 19^\circ$ に比べ 21° は $\sin^2 \theta \cos \theta$ の値が1.2倍になるので, 揚力の大きさは $1.2 Mg$
- ⑨ 加速度を a とすると, 運動方程式は $Ma = 1.2Mg - Mg$ よって, $a = 0.20g$
- ⑩ 水平方向の運動方程式は $M\alpha = F \sin s$
- ⑪ 鉛直方法のつり合いの式は $Mg = F \cos s$
- ⑫ 図8のグラフより 12° 傾ければよい。
- ⑬ 図7のグラフより 0.21° 増加させればよい。

これより $\alpha = g \tan s$ となり, この式をグラフにしたのが図8である。

<グラフが成立する理由 微分あり>

メインローターの揚力 F の鉛直成分はヘリコプターの重力と釣り合っているので,

$$Mg = F \cos s$$

よって, $F = \frac{Mg}{\cos s}$

ここで, $\frac{1}{\cos^2 s} = 1 + \tan^2 s$ を用いると,

$$F = \frac{Mg}{\cos s} = Mg \sqrt{1 + \tan^2 s} = Mg \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{g^2}}$$

ホバーリングのつり合いの式より $\frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta = Mg$ なので,

$$F = \frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{g^2}}$$

この揚力がピッチ角の増加分 $\Delta\theta$ と等しくなるので,

$$\frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{g^2}} = \frac{2}{3} R^3 \rho \omega^2 L \sin^2(\theta + \Delta\theta) \cos(\theta + \Delta\theta)$$

簡単にすると,

$$\sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{g^2}} = \sin^2(\theta + \Delta\theta) \cos(\theta + \Delta\theta)$$

$$1 + \frac{\alpha^2}{g^2} = \frac{\sin^4(\theta + \Delta\theta) \cos^2(\theta + \Delta\theta)}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}$$

$$\frac{\alpha^2}{g^2} = \frac{\sin^4(\theta + \Delta\theta) \cos^2(\theta + \Delta\theta) - \sin^4 \theta \cos^2 \theta}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{\sin^4(\theta + \Delta\theta) \cos^2(\theta + \Delta\theta) - \sin^4 \theta \cos^2 \theta}{\Delta\theta} \times \frac{\Delta\theta}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta}$$

最初の分数式は微分の形をしているので,

$$= \frac{(\sin^4 \theta \cos^2 \theta)'}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} \Delta\theta$$

とおける。 α を求めると,

$$\alpha = g \sqrt{\frac{(\sin^4 \theta \cos^2 \theta)'}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} \Delta\theta} = g \sqrt{\frac{4\sin^3 \theta \cos^3 \theta - 2\sin^5 \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta \cos^2 \theta} \Delta\theta}$$

$$= g \sqrt{\frac{6\cos^2 \theta - 2}{\sin \theta \cos \theta} \Delta\theta}$$

この式に $\theta = 19^\circ$ を代入し度数法に直すと, グラフの式が求められる。

$$\alpha = 4.27 \sqrt{\Delta\theta}$$

2 ヘリコプター本体がメインローターに加える力の反作用を受け, 本体はメインローターと逆回転してしまうのでこれを防ぐためにテールローターがある。

3 ピッチ角を大きくすると, 揚力が大きくなるので, 揚力が小さくなる側のピッチ角を大きくして揚力が同じになるようにする。