G012法隆寺五重塔の耐震性

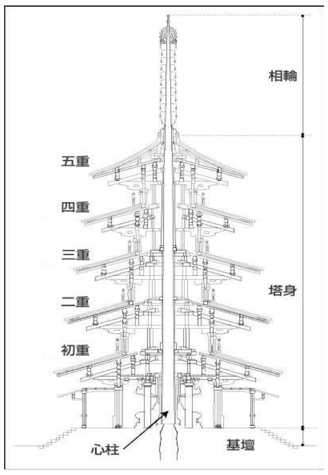
1

日本最古の木造建築物は約1300年前と言われる法隆寺の五重塔であるが，これをはじめ全国の五重塔は震度7に該当する大地震に何回もあっているにもかかわらず，地震で倒れたという記録が全くない。これに関する以下の文章の（①）～（⑪）に[ ]で文字が指定されている時は指定された文字用いた式を，[用語]とある場合は文章中で用いられている用語を，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。そして，最後の問いに答えよ。

【思考力】

五重塔の構造は図１のようになっている。中心に心柱と呼ばれる柱があるが，各層は心柱に固定されておらず左右に動くことができるようになっている。また，五重塔の最先端には金属製の質量の大きい相輪が設置されている。さらには心柱は地面に固定されていないのである。これらが地震に強い理由であると思われるが，これを科学的に解明してみよう。

図１



まず，図２のように最上層および相輪の部分を質量 m の物体Mとし，その下に心柱を意味する長さ l の軽い棒を設置し，各層の壁に該当するものとして棒に平行するように間隔 $\frac{d}{2}$ 空けたばね定数 k のばねA,Bを取り付けた五重塔を模したモデルを考える。

図２

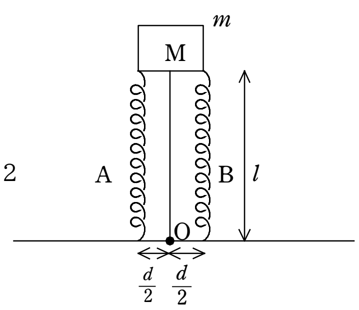
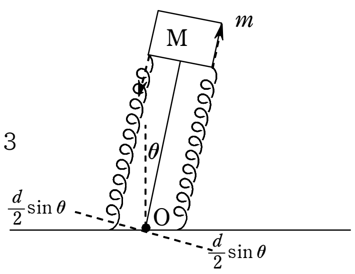


図３



この装置を図３のように右に微小角θ傾けるとBのばねは $\frac{d}{2}\sin\theta$ 縮み，Aのばねは $\frac{d}{2}\sin\theta$ 伸びる。その結果MはばねAより下向きに（①[k,d,θ]），ばねBより上向きに（①）の力を受けることになる。この2本の力は偶力となっており，作用線間隔は d なので，この偶力のモーメントの大きさ M_1 は $M_1 =$（②[k,d,θ]）となる。

この物体の重心Gに重力 mg が働いているので，Oを回転中心とした重力のモーメントの大きさM_2 は $M_2 =$（③[m,g,l,θ]）となる。M_1 と M_2 は互いに逆回転であり，五重塔は元に戻ろうとするので，$M_1 > M_2$ となるはずである。Mには元に戻そうと左向きに加速度 a で加速しているとすれば，右向きに慣性力 ma がはたらいていることになり，この慣性力のモーメントの大きさ M_3 は $M_3 =$（④[m,a,l,θ]）となる。慣性力を考えれば力のモーメントのつり合いの式（⑤[M_1,M_2,M_3]）が成り立ち，$\theta \fallingdotseq 0$とななので，$\sin\theta = \theta$，$\cos\theta = 1$とおき，この物体の変位を x とし，$x = l\theta$でθを x で置き換えると。

$$k\frac{d^2}{2}\frac{x}{l} = mg\,x + mal$$

となり，これは，

$$ma = \frac{kd^2 - 2mgl}{2l^2}x$$

となる。この式は<u>単振動を意味している</u>ので，角振動数ω_0として$a =$（⑥[ω_0 , x]）と置くと

角振動数$\omega_0 =$（⑦[g,m,l,k,d]）

となる。角振動数が小さいほど周期が長いので，塔が高くて最上端の質量が大きいほどゆっくりと振動することになる。

地震が来た場合O点が振動するが，この時のO点の振動が，振幅 A，角振動数ωとして，時刻 t の変位が$A\sin\omega t$であらわされる単振動をしたとする。この単振動の 加速度は $-A\omega^2\sin\omega t$となるので，質量 m の物体Mに加速度 b の慣性力がはたらいたとして運動方程式を立てると，

$$mb = -m\,\omega_0{}^2 x - mA\omega^2\sin\omega t$$

ここで，Mが $x = B\sin\omega t$であらわされる単振動をしているとすると，$b = -B\omega^2\sin\omega t$となるので，

$$-m\,B\omega^2\sin\omega t = -m\,\omega_0{}^2B\sin\omega t - mA\omega^2\sin\omega t$$

これを B について解くと

$B = \dfrac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0{}^2}A$ となる。角振動数ωの時の周期を T，ω_0 の時の周期を T_0 とすると $\omega =$（⑧[T]）となるので，$B =$（⑨[T,T_0]）A となる。

$T_0 = T$ の時に振幅が無限に大きくなる。これは，巨大振動することを意味しており，（⑩[用語]）と呼ばれている現象である。T_0 と T の差が大きいときに地震の振動のエネルギーが伝わりにくいことを意味している。ここで心柱が地面に固定されていない場合，固定されている場合よりも A が小さくなり，その結果Mの振幅 B も小さくなることになる。

図４

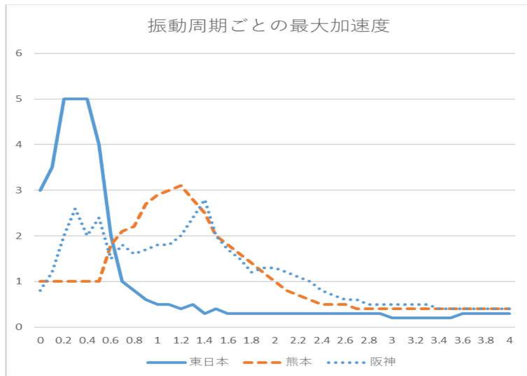
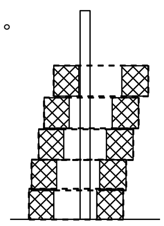


図４は東日本大震災･阪神大震災･熊本地震の振動周期ごとの最大加速度の大きさをm/s²単位で示している。東日本大震災は最大加速度5を超える分に関しては上部をカットしてある。最大20m/s²であるとされている。五重塔は振動周期がほぼ4.0s程度であり，この周期であればどの地震でも最大加速度はかなり小さくなるので，共振が起こりにくいといえる。

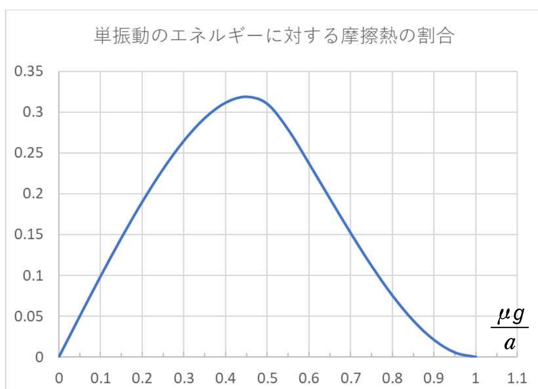
しかし A が大きいと T_0 と Tが少々ずれていても B は大きくなり，五重塔の倒壊が起こる。五重塔は心柱と各層との間に隙間が作られていいて，各層は図５のように左右に滑りながら振動できるようになっている。（図５は極端に描いてある）さらに各部材がゆるゆるに組まれているので，部材同士の摩擦によって地震による運動エネルギーが摩擦熱として消滅するように設計されている。

図５



摩擦によって失われる地震のエネルギーはどれほどであろうか。単振動する摩擦のある水平面上に物体を置いた時，単振動のエネルギーに対する摩擦によって失われるエネルギーの比を振動の加速度ごとにあらわしたのが図６である。

図６



グラフの縦軸が単振動のエネルギーに対する摩擦によって失われるエネルギーの比を表し，横軸は単振動の最大加速度 a に対する摩擦による加速度 μg の比 $\frac{\mu g}{a}$ を表している。ここでμは動摩擦係数，g は重力加速度である。高度な計算により，最大加速度，物体の質量に関係なく，このグラフの値は変わらないことがわかっている。最大加速度4.0m/s²の地震が来た時，動摩擦係数0.20の木材だったとすると，単振動に対する摩擦熱の割合は（⑪[数値]）となり，振動のエネルギーの（⑪）倍のエネルギーが摩擦で失われることになり，五重塔の倒壊を防ぐことができる。

問　文章中下線部において，なぜ，単振動であることがわかるのか説明せよ。

解説

① $k\dfrac{d}{2}\sin\theta$　② $k\dfrac{d^2}{2}\sin\theta$　③ $mgl\sin\theta$　④ $mal\cos\theta$

⑤ $M_1=M_2+M_3$　⑥ $-\omega_0{}^2x$　⑦ $\sqrt{\dfrac{2l^2}{2mgl-kd^2}}$　⑧ $\dfrac{2\pi}{T}$　⑨ $\dfrac{T_0{}^2}{T_0{}^2-T^2}$

⑩ 共振　⑪ $\dfrac{\mu g}{a}=\dfrac{0.20\times10}{4.0}=0.50$　0.50に対応する値はグラフより　0.3

問　復元力が変位に比例している。