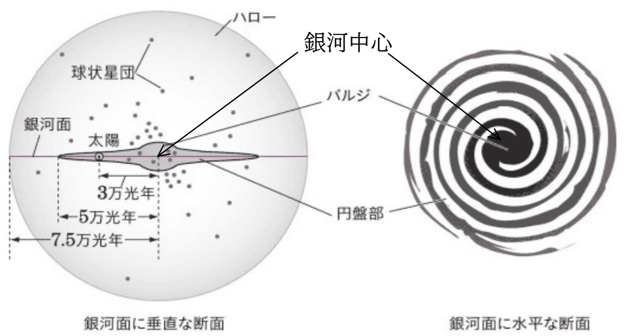
G009銀河中心の謎

1

　我々の住んでいる地球は太陽系に属している。太陽系は銀河系と呼ばれている星の大集団に属しており，その大集団は夜空に「天の川」としてみることができるので，銀河系のことを「天の川銀河」とも呼んでいる。銀河系に関する以下の文章の（①）～（⑬）に当てはまる[　]内の文字を用いた式を入れよ。また，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。【思考力】

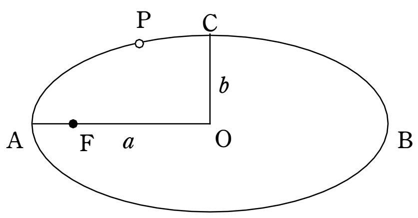
　図１は天の川銀河の断面図である。渦巻の中心が銀河中心で太陽系は，銀河中心から3万光年（光で3万年かかる距離）離れている。この銀河系の中心部には「sgrA*」と呼ばれている謎の天体が存在している。ケプラーの第三法則を用いて銀河系の中心領域を探ってみよう。

図１



　まずはケプラーの第三法則を確認してみよう。図２のように点Oを中心とする楕円軌道を考える。軌道半長径を a，半短径を b，中心天体の位置（焦点）をFとする。軌道上でFに最も近い点（近星点）をA，最も遠い点（遠星点）をB，軌道上においてAとBのちょうど間の位置をCとする。軌道上の天体（動点）をPとして考える。

図２



　中心天体の質量を M，Pの質量を m，万有引力定数を G とする。FP= r のとき，Pにはたらいている万有引力の大きさは（①[G,M,m,r]）となる。Pの速さを v とすると，Pの運動エネルギーは（②[m,v]）で，万有引力による位置エネルギーは（③[G,M,m,r]）となる。また，FC=（④[a]）であり，これを平均半径と呼んでいる。C点での速度は軌道上の平均速度となり，それを $\overline{v}$ であらわすと，P点とC点におけるエネルギー保存則は

　（②）＋（③）＝（⑤[$m,\overline{v},G,M,a$]）　　(i)

　となる。

このPが一定の速さ $\overline{v}$ で中心O半径 a の円軌道を描いているとすると，向心加速度は（⑥[$a,\overline{v}$]）であらわされるので，運動方程式は

　$m\times$（⑥）＝（⑦[G,M,m,a]）　　(ii)

となる。(i)，(ii)より，$\overline{v}$ を消去すると，

$$v=\sqrt{GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)}\qquad \text{(iii)}$$

を導くことができる。この式で軌道上の任意の位置での速さが求められる。

　C点における面積速度は（⑧[$b,\overline{v}$]）となり，楕円の全面積は πab であらわされるので，この楕円軌道を一周する時間（周期）T は

　$T=$（⑨[$a,\overline{v}$]）　　(iv)

となる。この式は b が含まれないので，周期は楕円の形に関係なく，半径 a の円軌道の周期と同じことを意味している。(ii),(iv)より $\overline{v}$ を消去すると，

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{GM}{4\pi^2}\qquad \text{(v)}$$

が導かれる。これが，ケプラーの第三法則である。

　銀河中心を調べるときに，これでは数値が複雑となるので，距離は太陽地球間を１とした距離（単位「AU」）および，時間は「年」を使うものとする。また，質量は太陽質量（ M_0[kg]）を１とした単位に変更する。単位を変更すると定数が変わるので次のように定数を変更する。１AU= a_0[m]，1年= T_0[s]とし，$a=\alpha a_0$，$T=pT_0$，$M=kM_0$ とする。これらを(iv)に代入すると，α[AU]，p[年]，中心天体が太陽の k 倍の質量をもっている場合，(v)は $\dfrac{\alpha^3 a_0{}^3}{p^2 T_0{}^2}=\dfrac{GkM_0}{4\pi^2}$ となる。　地球の場合

$$\frac{a_0{}^3}{T_0{}^2}=\frac{GM_0}{4\pi^2}\qquad \text{(vi)}$$

となるので，簡単にすると

$$\frac{\alpha^3}{p^2}=（⑩[\ k\ ]）\qquad \text{(vii)}$$

が成り立つ。以降この式を使う。

　$r=da_0$ として(iii)に代入すると

$$v=\sqrt{GkM_0\left(\frac{2}{da_0}-\frac{1}{\alpha a_0}\right)}$$

となり，(vi)を用いて GM_0 を消去すると

$$v=\frac{2\pi a_0}{T_0}\sqrt{k\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

　となる。$\dfrac{2\pi a_0}{T_0}$ は地球軌道上の速度となるので数値的に30km/sである。よって，

$$v=30\sqrt{k\left(\frac{2}{d}-\frac{1}{\alpha}\right)}\quad \text{[km/s]}\qquad \text{(viii)}$$

　これらの式をもとに，銀河中心領域を調べてみよう。銀河中心には「sgrA*」と呼ばれている見ることのできない謎の天体が存在している。そして，「sgrA*」の周りをいくつかの恒星が楕円軌道を描いて回っているのである。そのうち内側を回っている7つの恒星の軌道要素は図３のとおりである。この表における d は軌道上における近星点の距離である。そして，v は近星点における恒星の速さである。

図３

恒星名	α[AU]	d[AU]	p[年]	v[km/s]
S14	2360	56	55.3	11700
S2	1028	120	(⑪)	7840
S12	2460	273	58.9	5180
S55	890	248	12.8	5182
S62	750	16.4	9.9	21600
S16	804	90	11	9010
S4714	852	12.6	12	24700

図４

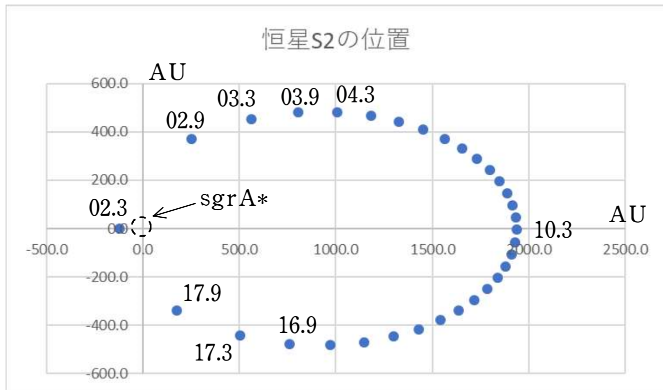


　図４は図３中の恒星S2の軌道の様子を図示したものである。図中の点がS2の半年ごとの位置を表し，点のそばの数値が観測した時刻を表している。数値「02.3」は2002年3月を意味する。以下同様である。この図よりS2の公転周期は約（⑪[数値]）年であることがわかる。原点に存在しているはずの見えない謎の天体が「sgrA*」と呼ばれている天体である。

　銀河中心の天体「sgrA*」の質量を求めるために図３の各天体の p^2 と α^3 の関係をグラフにしたのが図５である。これを見ると(vii)式中の k=（⑫[数値]）であることがわかり，「sgrA*」の質量は太陽の（⑫）倍というとてつもない質量の天体であることがわかる。

p^2 と α^3 との関係

図５

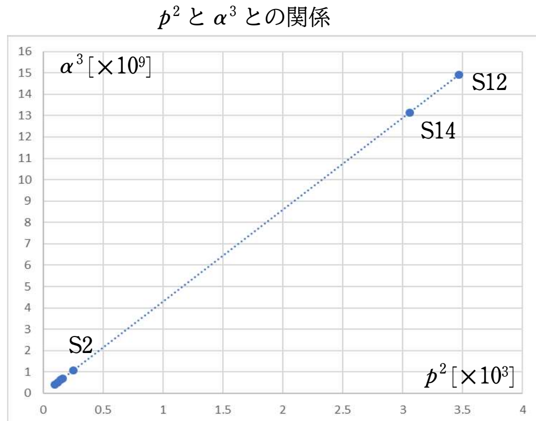


　図３の v は図５から読み取った k の値をもとにして（viii）より，近星点における各恒星の速さを求めたものであるが，この中でS4714という恒星の最大の速さは（⑬[数値]）km/sであり，この速さは地球一周1.6sというとてつもない速さで光速度 3.0×10^5km/sに近い速さである。この速さは観測された恒星の中では最も速いものであ

る。

(viii)において，$\alpha\to\infty$とした時，放物線軌道になり，このときの速度は脱出速度と呼ばれ，その天体から脱出できる速度を意味するが，この速度が光速度に達すると，光ですらその天体から脱出することができないブラックホールと呼ばれている天体となる。(viii)より，脱出速度が光速度になる距離 d を求めてみると $d=0.086$AUとなり，この距離は太陽半径の20倍ほどに該当する。この距離内に入ると光すら出てこれなくなるので，この「sgrA*」と呼ばれている天体はブラックホールである可能性が高い。

解説

①～⑨はケプラーの第三法則の誘導過程そのものである。

① 万有引力の法則より，$\underline{\dfrac{GMm}{r^2}}$

② 運動エネルギーなので，$\underline{\dfrac{1}{2}mv^2}$

③ 万有引力による位置エネルギーなので，$\underline{-\dfrac{GMm}{r}}$

④ 平均半径は半長径と等しい $\underline{a}$

⑤ C点での運動エネルギーは $\dfrac{1}{2}m\overline{v}^2$ 万有引力による位置エネルギーは $-\dfrac{GMm}{a}$

なので，エネルギーの和は $\underline{\dfrac{1}{2}m\overline{v}^2-\dfrac{GMm}{a}}$

⑥ 向心力加速度は $\underline{\dfrac{\overline{v}^2}{a}}$

⑦ C点での万有引力なので，$\underline{\dfrac{GMm}{a^2}}$

$<v=\sqrt{GM\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$ の誘導$>$

エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}m\overline{v}^2-\frac{GMm}{a} \qquad \text{(i)}$$

このPが一定の速さ $\overline{v}$ で中心O半径 a の円軌道を描いているとすると，運動方程式は

$$m\frac{\overline{v}^2}{a}=\frac{GMm}{a^2} \qquad \text{(ii)}$$

となる。(ii)より，$m\overline{v}^2=\dfrac{GMm}{a}$

(i)に代入すると，

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{GMm}{r}=\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}-\frac{GMm}{a}$$

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{GMm}{r}-\frac{1}{2}\frac{GMm}{a}$$

よって，$v=\sqrt{GM\left(\dfrac{2}{r}-\dfrac{1}{a}\right)}$ (iii)

⑧ 面積速度は $\underline{\dfrac{1}{2}b\overline{v}}$

⑨ 周期は円周を速さで割ったもの $\underline{\dfrac{2\pi a}{\overline{v}}}$

⑩ $\dfrac{\alpha^3a_0^{\,3}}{p^2T_0^{\,2}}=\dfrac{GkM_0}{4\pi^2}$を，$\dfrac{a_0^{\,3}}{T_0^{\,2}}=\dfrac{GM_0}{4\pi^2}$で割ると $\dfrac{\alpha^3}{p^2}=k$となる。 よって，$\underline{k}$

⑪ 近星点が02.3で，遠星点が10.3なので，半周に8年かかっている。

よって，周期は$\underline{16}$年

⑫ kは図５のグラフの傾きである。

$p^2=3.0\times10^3$のとき，$a^3=13\times10^9$である。

$k=\dfrac{\alpha^3}{p^2}=\dfrac{13\times10^9}{3.0\times10^3}=\underline{4.3\times10^6}$

⑬ 図３の表よりS4714の vの値 を読み取ればよい。$\underline{2.47\times10^4}$