G007サッカーコーナーキック

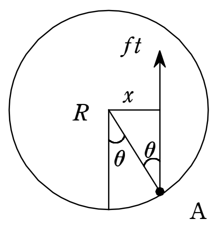
1

　サッカーのコーナーキックに関する以下の文章の（①）～（⑫）に[　]内で文字が指定されている場合は，指定された文字を用いた当てはまる数式を入れ，また，[数値]とある場合は当てはまる数値を入れよ。

　ボールを蹴る位置とボールの回転の関係，飛んだボールはどれだけ曲がるかを考えてみよう。簡単のために，インパクトの瞬間ボールは変形せず，かつ，滑らないものとし，水平方向のみの運動を考えるとする。

　図１のように半径 R，質量 m のボールの中心からの角度θ離れた位置に，中心方向からθの方向に力積 Ft を加えた。その時のボールの速さ v と回転数 fの比を求めてみよう。

図１



　ボールの回転を考えないときは力を平行移動してもよいので，キック後のボールの速さ v を考えるときは Ft が重心にはたらいていると考えてよい。キック前にボールが静止しているとすると，

$Ft=$ （①[m,v]）　　　(i)

　キック後ボールは重心を回転中心として回転する。角速度をωとすると回転速度 $R\omega$は高度な計算により，

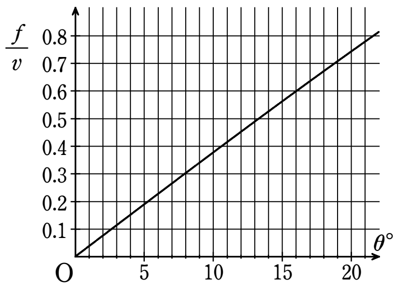
$R\omega=\dfrac{3\sin\theta}{2m}Ft$　　(ii)

であらわされる。また，回転数を f とすると，$\omega=2\pi f$なので，(i)(ii)より Ft を消去すると，

$\dfrac{f}{v}=$ （②[R,θ]）

　となる。 $R=0.11$mとして，角度θ°と $\dfrac{f}{v}$ の関係をグラフにあらわすと，図２のようになる。

図２



　このグラフより， $v=30$m/sで $f=7.5$回転/sのボールを蹴ろうと思えば，$\theta=$（③[数値]）°の位置を蹴ればよいことが分かる。また，その時に加える力積 ft の大きさは $m=0.42$kgとすると，（④[数値]）Nsとなる。

　最も不規則な変化をするように見える回転数は $f=0.25$Hzとされている。10m/sでこの回転数にするには $\dfrac{f}{v}=0.025$となり，中心からずれる角度は0.8°でしかない。この回転数で蹴るのはかなり難しいことが分かる。 遅いボールほど$\dfrac{f}{v}$が大きくなるので，不規則に変化するボールを蹴りやすいことになる。

　サッカーの試合において，図１のように，コーナーキックをしたところ，ボールがカーブを描いて飛んでいき，ゴールキーパーの頭上を越えて直接ゴールに入った。その時のボールの軌道を考えてみよう。

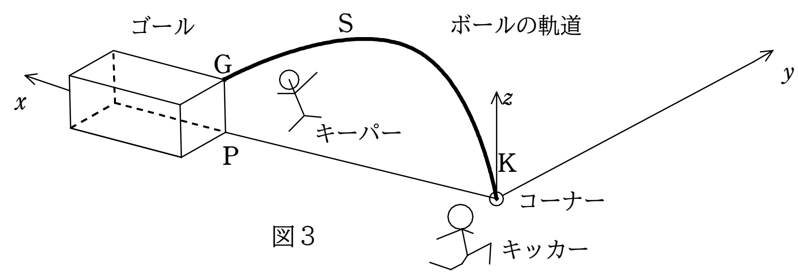


図３

　図２のようにサッカーコート上にコーナーKを原点としたx軸，y軸を取る。図２の太い曲線PKは，キッカーが原点K（0，0）から距離 L 先のゴールの端x軸上のP（30，0）をめがけてコーナーキックしたときのサッカーコートの真上から見たボールの軌道を示している。

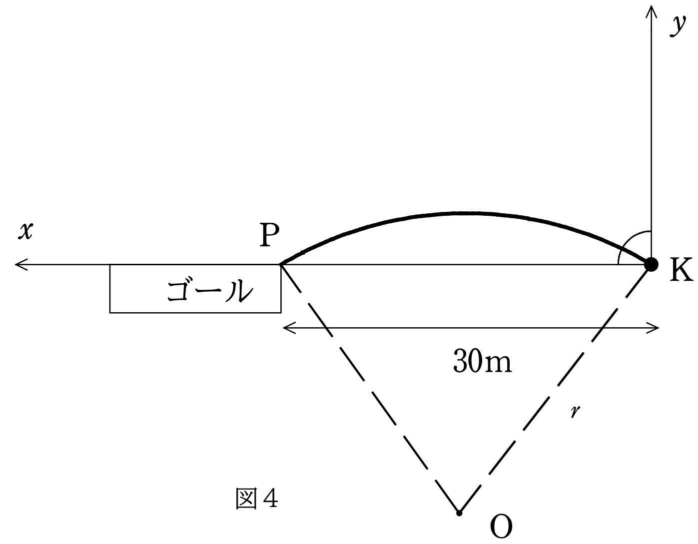


図４

　キック後のサッカーボールが水平に回転すれば，ボールの進行方向に直角にマグナス力と呼ばれている力が働く，この力によってボールは曲がるのである。この力の大きさが一定のとき，サッカーコート真上から見たボールは点Oを中心とした等速円運動をしているように見える。そして，このマグナス力が向心力として働く。

　ボールの水平方向の速度 $v=30$m/s，ボールの回転数 $f=7.5$回転/sのとき，マグナス力 F の大きさは比例定数を k として， $F=kvf$ であらわされる。この比例定数はサッカーボールの場合 $k=\dfrac{1}{75}$ とされているので， $F=$（⑤[数値]）Nとなる。サッカーボールの質量をmとすると，ボールの速さ v，回転半径を r とすると，向心力の大きさは（⑥[m,v,r]） であらわされ，これが，マグナス力 F と等しくなる。運動方程式を立てて解くと，ボールの等速円運動の回転半径KOは $r=$（⑦[m,v,F]） となり， $m=0.42$kgとすると， $r=$（⑧[数値]）mとなる。

　PKの距離に比べて回転半径がはるかに大きいので，ボールがPK間を直進すると考えても差支えない。この場合キックしたボールがP点に達するのは時間（⑨[数値]）s後となる。

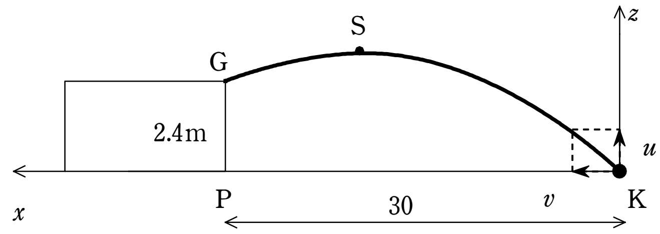


図５

　図３はコーナーキックのボールを真横（y軸負の方向）から見た軌道として表したものである。z軸はコート面からの高さを表している。

　Pはゴールポストの最下点であり，Gは最上端を表している。GPの距離は2.4mである。Kを出発したボールがGに時間 t は $t=$（⑨） s後に達するので，鉛直方向の平均速度は（⑩[数値]） m/s となる。鉛直方向初速度を u [m/s]，重力加速度の大きさを 10 m/s^2 とすると，（⑨）s後のボールの鉛直方向の速度は u を用いて，（⑪[u]） となる。平均速度から計算すると $u=$（⑫[数値]） m/s となる。

解説

① 力積は運動量の変化と等しいので　mv

② $R\omega=\dfrac{3\sin\theta}{2m}ft$ で， $ft=mv$，$\omega=2\pi f$ を代入すると，

$2\pi fR=\dfrac{3\sin\theta}{2m}mv$ となるので，

$\dfrac{f}{v}=\underline{\dfrac{3\sin\theta}{4\pi R}}$

③ $f=7.5$， $v=30$なので， $\dfrac{f}{v}=0.25$　となる。

グラフの縦軸が0.25となる横軸は6.5なので，$\theta=\underline{6.5}$°

④ $ft=mv=0.42\text{kg}\times30\text{m/s}=\underline{13}\text{Ns}$

⑤ $F=kvf=\dfrac{1}{75}\times30\times7.5=\underline{3.0}\text{N}$

⑥ 向心加速度が $\dfrac{v^2}{r}$なので，運動方程式より $\underline{\dfrac{mv^2}{r}}$

⑦　$F=m\dfrac{v^2}{r}$より，$r=\dfrac{mv^2}{F}$

⑧　$r=\dfrac{mv^2}{F}=\dfrac{0.42\times 30^2}{3.0}=\underline{126}\mathrm{m}$

⑨　30mを30m/sで進むので，$\underline{1.0}$s

⑩　1.0sで2.4m変位するので，$\underline{2.4}$m/s

⑪　重力加速度の大きさが10 m/s^2 なので，1.0sに10m/s遅くなる。よって，$\underline{u-10}$

⑫　平均速度が2.4m/sなので，$\dfrac{u+u-10}{2}=2.4$　　これを解くと　$u=\underline{7.4}$m/s

高度な計算の内容

＜回転運動に関する方程式＞

回転半径 r の円周上に静止していた物体に力積 Ft を加えると，運動量 mv となった。

このとき，この物体は回転半径 r 角速度ωの等速円運動を始めたとすると，

$Ft=mv=mr\omega$

となる。両辺に r を掛けると　$Ftr=mr^2\omega$となる。

この式中mr^2は「慣性モーメント」と呼ばれている量で，回転のしにくさを表している。この式は，「力積のモーメント＝慣性モーメント×角速度」を意味しており，右辺は運動量のモーメントを示す「角運動量」と呼ばれている量である。

＜ボールの慣性モーメントの計算＞

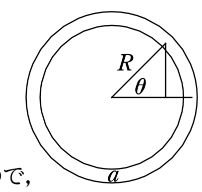
半径 R，質量 m，密度ρ，ゴムの厚さ a のボールがある。内部は空気であるが空気の質量は無視できるものとする。

水平から角度θの方向の薄い球殻を考える。半径 $R\cos\theta$ で，円周は $2\pi R\cos\theta$で幅が $R\,d\theta$ 厚さが a なので，

$\theta\sim\theta+d\theta$の範囲にあるこの部分の体積は

$2\pi R\cos\theta\cdot a\cdot Rd\theta=2\pi R^2a\cos\theta\ d\theta$

となる。



質量は $2\pi R^2a\rho\cos\theta\,d\theta$ となり，回転半径は $R\cos\theta$ なので，

この部分の慣性モーメントは

$2\pi R^2a\rho\cos\theta\cdot R^2\cos^2\theta\ d\theta$

全体の慣性モーメント I を求めるために，これを積分すると

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\pi a\rho R^4\cos^3\theta\,d\theta=2\pi a\rho R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta$$

$$=2\pi a\rho R^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$　（これは数Ⅲの置換積分）

$\sin\theta=t$と置くと，　$\cos\theta\ d\theta=dt$

$$=2\pi a\rho R^4\int_{-1}^{1}(1-t^2)dt=2\pi a\rho R^4\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{3}\pi a\rho R^4$$

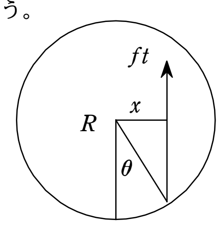
ここで，$m=4\pi R^2a\rho$ なので，

$$I=\frac{2}{3}mR^2$$

となる。これが慣性モーメントである。

＜蹴る位置とボールの回転数との関係＞

ボールの中心からの角度θ離れた位置に，力積 ft を加えた。その時のボールの速さ v と回転数 fの比を求めてみよう。



ボールの回転を考えないときは力を平行移動してもよいので，キック後のボールの速さ v を考えるときは ft が重心にはたらいていると考えてよい。キック前にボールが静止しているとすると，

$mv=ft$　　(i)

キック後ボールは重心を回転中心として回転するので，その力積のモーメントは

$ftx=ft\,R\sin\theta$

となる。これが角運動量となるので，角速度をωとすると，

$ft\,R\sin\theta=I\omega=\dfrac{2}{3}mR^2\omega$　　(ii)

回転速度 $R\omega$ を求めると，

$$R\omega=\frac{3\sin\theta}{2m}ft$$

となる。