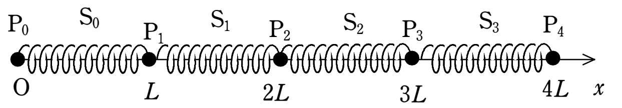
G004超音波エコーの原理

1

　医療界では，患者の診察に超音波エコーが使われている。まず音波の理論を考え，それを用いて超音波エコーの映像を分析してみよう。それに関する以下の文章の（①）～（⑧）の直後の［　］内に文字が指定されている場合はその文字を用いた式を入れ，［選択］とある場合は，その中に含まれている用語の中から当てはまる用語を選択し，最後の問いに答えよ。【思考力】

　滑らかな水平面上にx軸をとる。原点Oに質量mで大きさの無視できるおもりP_0を置き，等間隔Lを保ちながら，P_1,P_2,P_3・・・と同じ質量 m のおもりを設置し，隣り合うおもり同士をばね定数k，自然長 L のばねS_0，S_1，S_2・・・で接続した。一つのおもりを振動させると，その振動が次々と伝わるようになっている。

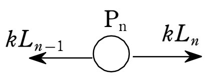
図１



　最初，すべてのおもりが静止しており，すべてのばねが自然長になっていた。このとき，おもりP_nのx座標はnLとなる。P_0,P_1,P_2,P_3・・・はx軸に沿う方向のみに振動できるものとする。

　おもりP_nが最初の静止位置からの変位をx_n とすると，ばねS_nの伸び L_n は，変位の差となるので，$L_n = x_{n+1} - x_n$ となる。P_nがP_{n+1}から受ける力は，kL_nとなる。同様にして，ばねS_{n-1}の伸びL_{n-1}が求められ，P_{n-1}から受ける力は kL_{n-1}となる。おもりP_nにはたらく力FはL_n，L_{n-1}を用いて表すと図２のようになる。

図２



その結果，$F=$（①［k,L_n,L_{n-1}］）とあらわされ，x_{n+1},x_n,x_{n-1}を用いて簡単にすると，

$F = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$　　(i)

となる。この式は隣接3項間の漸化式であるが，縦波となるので，$x_n = A\sin\omega\left(t - \dfrac{nL}{v}\right)$ であらわされる正弦波だと仮定して解くことにする。ωは角振動数，v は波の速さ，A は振幅，t は時刻を表す。この媒質の加速度 a_n は

$a_n = -A\omega^2\sin\omega\left(t - \dfrac{nL}{v}\right)$ であらわされるので，(i)は

$F = m\,a_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})$

正弦波の式を代入すると，

$$-mA\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)$$

$$= kA\sin\omega\left(t-\frac{(n+1)L}{v}\right) - 2kA\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right) + kA\sin\omega\left(t-\frac{(n-1)L}{v}\right)$$

となる。この式を加法定理を用いて簡単にすると，

$$-m\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right) + 2k\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right) = 2k\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)\cos\omega\frac{L}{v}$$

$$m\omega^2 = 2k\left(1-\cos\omega\frac{L}{v}\right)$$

ここで，2倍角の公式 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ を用いると

$$m\omega^2 = 4k\sin^2\frac{\omega L}{2v}$$

実際の音波の振動では $v >> \omega L$ なので，$\dfrac{\omega L}{v} \fallingdotseq 0$となる。$\sin^2\dfrac{\omega L}{2v} = \dfrac{\omega^2 L^2}{4v^2}$と考えてよい。よって，

$$m\omega^2 = 4k\frac{\omega^2L^2}{4v^2}$$

v について解くと　$v = L\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

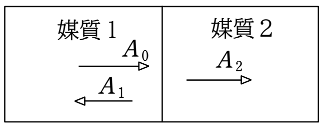
この式で $\dfrac{m}{L^3}$ は媒質の密度を表すので，この密度をρと置くと，$m = \rho L^3$ となる。$\dfrac{k}{L}$は ばねの長さ1m当たりのばね定数を表し，ばねは自然長が長いほど伸びやすく，ばね定数が小さくなるので，1m当たりのばね定数は材質の硬さを意味することになる。ヤング率と呼ばれている材質による定数である。これを E と置くと，$k = EL$ となる。これらの文字に置き換えると，

$v =$（②［E,ρ］）　　(ii)

となり，媒質の硬さと密度により音速は決定する。よって，波の波長・振動数・振幅などは波の速さとは無関係となる。

　次に，媒質の境界における波の反射について考えてみよう。図３は媒質１を伝わってきた振幅 A_0 の波が，振幅 A_1 で反射し，媒質２に振幅 A_2 で入り込んだ様子を示している。

図３



媒質１の左端の媒質の最大変位は $A_0 + A_1$ で媒質２の最大変位は A_2 である。両者は接触しているのでこの変位は等しくなければならない。よって，

（③［A_0,A_1,A_2］）　　(iii)

が成立する。このとき，固定端反射の場合は位相がπずれるので，$A_1 < 0$と考える。

　質量 m の媒質が最大速度 u で単振動している時の単振動の力学的エネルギー U は $U=$（④［m,u］）である。振幅 A，角振動数ωの単振動の場合，最大速度 u は $u =$（⑤［A,ω］）であらわされるので，$U = \dfrac{1}{2}mA^2\omega^2$となる。波動の場合，エネルギーは波によって運ばれるので，波の速さを v とすると，1s間に1m²を通過するエネルギーを含む領域の媒質の体積は v となり，その質量 m は密度をρとすると，$m = \rho v$ となる。この m を音響インピーダンスと呼んでいる。よって，波のエネルギーが1s間に1m²を通過するエネルギー W は $W = \dfrac{1}{2}\rho vA^2\omega^2$ となる。このWを「音の強さ」という。

　媒質１の密度を ρ_1，波の速さを v_1とし，媒質１側から角振動数ω，振幅 A_0 の波が境界面に垂直に入射した時，この音の強さ W_0 は，$W_0 = \dfrac{1}{2}\rho_1 v_1 A_0{}^2\omega^2$，反射波の振幅が$A_1$なので，反射波の音の強さ W_1 は $W_1 = \dfrac{1}{2}\rho_1 v_1 A_1{}^2\omega^2$ となる。また，媒質２の振幅は A_2 なので，媒質２の密度を ρ_2，波の速さを v_2とすると，媒質２に入り込む音の強さ W_2 は $W_2 = \dfrac{1}{2}\rho_2 v_2 A_1{}^2\omega^2$となる。エネルギー保存則より，

（⑥［W_0,W_1,W_2］）

が成り立つ。この式を簡単にすると。

$\rho_1 v_1 A_0{}^2 = \rho_1 v_1 A_1{}^2 + \rho_2 v_2 A_1{}^2$　　(iv)

(iii)，(iv)を連立させて A_1，A_2 について解くと

$$A_1 = \frac{\rho_1 v_1 - \rho_2 v_2}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}A_0 \qquad A_2 = \frac{2\rho_1 v_1}{\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2}A_0$$

この式より，$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$のとき，$A_1 = 0$となるので，音は反射せず通過し，$\rho_1 v_1$と$\rho_2 v_2$の差が大きいほど反射しやすく，小さいほど反射しにくいことが分かる。また，$\rho_1 v_1 < \rho_2 v_2$ときは，反射波A_1の符号が逆になり，これは，（⑦［固定，自由の選択］）端反射を意味しており，$\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$の時は（⑧［固定，自由の選択］）端反射を意味している。

　超音波エコーを考える上で人体に関する物質の音響インピーダンスは表のようになっている。人体内での組織の密度は空気以外はほぼ同じなので，音速は材質の硬さ（ヤング率）でほぼ決まる。硬い組織ほど音速が大きく，音響インピーダンスも大きくなるのである。これを見ると，骨と空気の音響インピーダンスが他の組織と大きく異なるので，超音波エコーでは骨と空気での反射率が高く，透過率が低くなる。

　これらの知識をもとに超音波エコーについて考えてみることにする。この表を見ると骨と空気の音響インピーダンスが他の組織と大きく異なる。よって，超音波エコーは骨と空気で大きく反射し，その先に影ができることになる。

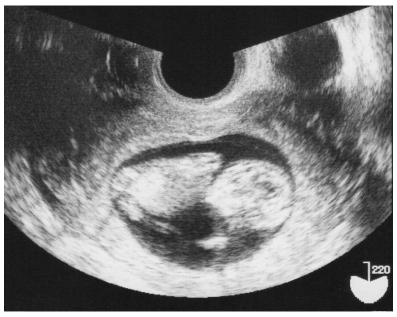
	音速[m/s]]	密度[kg/m^3]	ヤング率10^6[Pa]	音響インピーダンス[$10^3 kg/m^2 s$]
骨	4080	1912	31800	7800
筋肉	1585	1073	2696	1700
血液	1570	1025	2527	1610
肝臓	1549	1065	2555	1650
水	1530	1000	2341	1530
脂肪	1450	952	2001	1380
空気	330	12	1.3	4

下の図A,Bは胆嚢の超音波エコー写真である。一方が胆石，一方がポリープである。

A

B

下の図C,Dは胎児の超音波エコー写真である。一方が13週目の胎児でもう一方が26週目の胎児である。

C  D 

問

1　A,Bのどちらが胆石か判別する理由とともに答えよ。

2　胆石やポリープは胆嚢内にあるが，胆嚢内のそれ以外の部分はエコー写真では真っ黒である。この中には何が詰まっていると考えられるか。
　hint　真っ黒ということは一切反射していないことを意味する。

3　Dが26週目の胎児である。その判断理由を答えよ。hint　Dには陰影がある。

解説

①　図２より，右向きを正として　$kL_n - kL_{n-1}$

②　$v = L\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ において　$k = EL$，$m = \rho L^3$を代入すると，

$$v = L\sqrt{\frac{k}{m}} = L\sqrt{\frac{EL}{\rho L^3}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

③　媒質１の左端の媒質の最大変位は $A_0 + A_1$ で媒質２の最大変位は A_2 である。両者は接触しているのでこの変位は等しいはずである。

$A_0 + A_1 = A_2$

④　u は最大速度であるので，振動の中心での運動エネルギーと考えることができる。振動の中心の場合，弾性力による位置エネルギーがないので，単純に運動エネルギーだけでよい。$\dfrac{1}{2}mu^2$

⑤　最大速度は等速円運動と考えた時の周回速度なので，　$A\omega$

⑥　エネルギー保存則が成立しているので，境界面に入る前のエネルギー W_0 と，境界面を過ぎた後の反射波と通過波のエネルギーの和 $W_1 + W_2$ は等しい。

$W_0 = W_1 + W_2$

⑦　$\rho_1 v_1 < \rho_2 v_2$ の時は，$A_1 < 0$となるので，位相がπずれている。よって，固定

正弦波の式　$y = A\sin\left\{2\pi\left(\dfrac{t}{T} - \dfrac{x}{\lambda}\right) + \phi\right\}$ で位相がπずれると，

$$y = A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi + \pi\right\} = -A\sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \phi\right\}$$

となるので，変位が逆になる。

⑧　$\rho_1 v_1 > \rho_2 v_2$ の時は，$A_1 > 0$であり，位相がずれていないので，自由

問　1　胆石　　影があるから

　　2　同じ媒質で液体と思われる。

　　3　影があるので骨が形成されている。