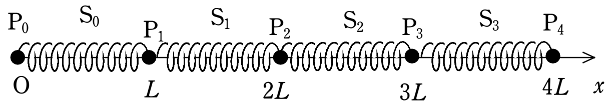
G001空気中音速算出

$\boxed{1}$

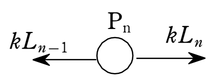
音速に関する以下の文章の（①）～（⑫）において，直後の［　］内に指定された文字を用いた式を入れよ。【思考力】

滑らかな水平面上にx軸をとる。原点Oに質量mで大きさの無視できるおもりP_0を置き，等間隔Lを保ちながら，P_1,P_2,P_3・・・と同じ質量のおもりを設置し，隣り合うおもり同士をばね定数kのばねS_0，S_1，S_2・・・で接続した。この時すべてのばねは自然長の状態であった。一つのおもりを振動させると，その振動が次々と伝わるようになっている。

図１


最初，すべてのおもりが静止しており，すべてのばねが自然長になっていた。このとき，おもりP_nのx座標はnLとなる。P_0は固定されており，P_1,P_2,P_3・・・はx軸に沿う方向のみに振動できるものとする。

おもりP_nが最初の静止位置からの変位をx_nとすると，ばねS_nの伸びL_nは，$L_n=x_{n+1}-x_n$となるので，P_nがP_{n+1}からの引く力は，kL_nとなる。同様にして，ばねS_{n-1}の伸びL_{n-1}が求められ，P_{n-1}から受ける力はkL_{n-1}となる。おもりP_nにはたらく力F_nはL_n，L_{n-1}を用いて表すと下の図のようになる。

図２


その結果　$F_n=$（①［k,L_n,L_{n-1}］）とあらわされ，x_{n+1},x_n,x_{n-1}を用いて簡単にすると，

$F_n=k(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})$　　(i)

となる。この式は隣接3項間の漸化式であるが，振幅A，角振動数ω，時刻t，波の速さvを用いて，$x_n=A\sin\omega\left(t-\dfrac{nL}{v}\right)$　であらわされる正弦波だとして解くことにする。

この媒質の加速度a_nは$a_n=$（②［ω,x_n］）であり，運動方程式より

$F_n=$（③［m,a_n］）　の関係があるので，これらを用いると(i)は

$$m\,a_n=k(x_{n+1}-2x_n+x_{n-1})$$

$$-mA\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)$$

$$=kA\sin\omega\left(t-\frac{(n+1)L}{v}\right)-2kA\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)+kA\sin\omega\left(t-\frac{(n-1)L}{v}\right)$$

となる。この式を加法定理を用いて簡単にすると，

$$-m\omega^2\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)+2k\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)=2k\sin\omega\left(t-\frac{nL}{v}\right)\cos\omega\frac{L}{v}$$

$$m\omega^2=2k\left(1-\cos\omega\frac{L}{v}\right)$$

ここで，2倍角の公式を使うと

$$m\omega^2=4k\sin^2\frac{\omega L}{2v}$$

実際の音波の振動では$v>>\omega L$と考えられる。よって，$\dfrac{\omega L}{v}\fallingdotseq 0$と判断してよいので，

$\sin^2\dfrac{\omega L}{2v}=\dfrac{\omega^2L^2}{4v^2}$と置き換えて差し支えない。その結果，

$$m\omega^2=4k\frac{\omega^2L^2}{4v^2}$$

が成り立ち　$v=$（④［L,k,m］）

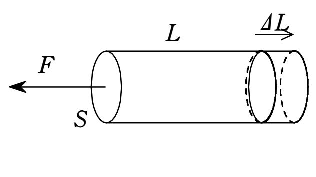
が求められる。このvがこの媒質を伝わる波の速さを意味している。

この式から空気中を伝わる音速を求めてみよう。このばねを断面積S，長さL，質量mの円柱と考える。この円柱の体積はSLなので，この円柱の密度ρは

$\rho=$（⑤［m,S,L］）　となる。よって，

$$v=\sqrt{\frac{kL}{\rho S}}\quad\cdots\text{(ii)}$$

次にこの媒質が物質量n，気体定数R，圧力P，体積V，絶対温度Tの空気であるとする。空気の体積は3次元的に変化するが，ここでは1次元しか考えていないので，媒質の断面積S，長さLの円柱としてとして断面積は変化しないものと考えることにする。この円柱のばね定数を求めてみよう。



ばね定数kのばねに力Fを加えた時にこのばねがx伸びたとすると，フックの法則より$F=kx$の関係が成り立つ。この媒質は圧力Pによって釣り合っているので，媒質に変位が起こるには圧力の増加が必要である。圧力がΔP上昇することによって，この円柱の長さがΔL短くなったとすると，この円柱の断面に加えた力はΔPSで，変位がΔLなので，フックの法則より，$\Delta PS=$（⑥［$k,\Delta L$］）が成り立つ。よって，

$$k=\frac{\Delta PS}{\Delta L}\quad\cdots\text{(iii)}$$

P,V,Tの間には状態方程式$PV=$（⑦［n,R,T］）　が成立している。ここで，圧力をΔPだけ増加した時，体積がΔV増加し，温度がΔT増加したとすると，

状態方程式$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=nR(T+\Delta T)$が成り立つ。$\Delta P$，$\Delta V$が微小量であるとすると，この式を展開したときの他項に対して$\Delta P\Delta V$は無視できるので，簡単にすると，

$\Delta PV+P\Delta V=$（⑧［$n,R,\Delta T$］）・・・(iv)が成り立つ。

この気体を音波が伝わる時，急激な圧力変化が予想されるので断熱変化と考えてよい。よって，内部エネルギーの変化をΔU，外部への仕事をWとすると，熱力学第一法則より

（⑨［$\Delta U,W$］）　・・・(v)

が成り立つ。

空気の定積モル比熱を$\dfrac{5}{2}R$とすると，$\Delta U=$（⑩［$n,R,\Delta T$］）。ΔVは微小変化なのでその間の圧力Pは一定と考えてよく，$W=$（⑪［$P,\Delta V$］）とあらわすことができる。

よって，(v)は

（⑩）＋（⑪）＝0　・・・(vi)

となる。(iv)，(vi)より，ΔTを消去すると，

$$\Delta PV=-\frac{7}{5}P\Delta V$$

が成立する。

ここで，$V=SL$，$\Delta V=S\Delta L$を用いて，V,ΔVを消去すると，

$$\Delta P=-\frac{7}{5}\frac{P\Delta L}{L}\quad\cdots\text{(vii)}$$

(iii)に(vii)を代入して，ΔPを消去すると，

$k=\dfrac{\Delta PS}{\Delta L}=\dfrac{7}{5}\dfrac{PS}{L}$となるので，

$$v=\sqrt{\frac{kL}{\rho S}}=\sqrt{\frac{7}{5}\frac{P}{\rho}}\quad\cdots\text{(viii)}$$

となる。

状態方程式$PV=nRT$において，物質量nはモル質量μと質量mであらわすと

$n=$（⑫［m,μ］）　となるので，$P=\dfrac{m}{\mu V}RT$となり，$\dfrac{m}{V}$は密度ρとなるので，

$P=\dfrac{R}{\mu}\rho T$となる。

この式は，$\dfrac{P}{\rho}=\dfrac{RT}{\mu}$となるので，(viii)式を置き換えると，

$$v=\sqrt{\frac{7}{5}\frac{RT}{\mu}}\quad\cdots\text{(ix)}$$

となる。

この理論式(ix)の精度と教科書の音速近似式$v=331.5+0.6\,t$，及びWebの高精度計算サイトによる結果を下の表で比較してみた。ここで，$R=8.31$ J/molK，$T=273+t$ [K]，$\mu=0.0289$ kg/molを用いて，−60℃～60℃の範囲で計算し比較してみた。音速はいずれもm/s単位である。

気温	理論式	*Web*サイト	近似式
−60	292.8	292.9	295.5
−40	306.3	306.3	307.5
−20	319.1	319.2	319.5
0	331.5	331.6	331.5
20	343.4	343.5	343.5
40	355.0	355.0	355.5
60	366.1	366.2	367.5

この表によると，この理論式とWebの高精度計算サイトの値は最大で0.1m/sのずれががあるが，近似式とは最大2.7m/sのずれがあり，この理論式はかなり高精度であることが分かる。

解説

①　図２の力を合成すればよい。右向きを正とすると，kL_n-kL_{n-1}

②　復元加速度の式　$-\omega^2x_n$

③　運動方程式　ma_n

④　$m\omega^2 = 4k\dfrac{\omega^2 L^2}{4v^2}$ を v について解くとよい。　$L\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

⑤　密度＝質量/体積　で体積＝ SL なので，　$\dfrac{m}{SL}$

⑥　フックの法則 $F = kx$ において　$x = \Delta L$　なので，　$k\Delta L$

⑦　状態方程式なので，　nRT

⑧　状態方程式の各変数を微増させた式　$(P+\Delta P)(V+\Delta V) = nR(T+\Delta T)$

展開すると　$PV+\Delta PV+P\Delta V+\Delta P\Delta V = nRT + nR\Delta T$

ここで，$PV = nRT$ なので，　$\Delta PV+P\Delta V+\Delta P\Delta V = nR\Delta T$

$\Delta P\Delta V$ は $\Delta PV+P\Delta V$ に対して無視してよいので

$\Delta PV+P\Delta V = nR\Delta T$

よって，　$nR\Delta T$

⑨　熱力学第一法則　$Q = \Delta U + W$ において，断熱変化なので，$Q = 0$

よって，　$\Delta U + W = 0$

⑩　内部エネルギーの増加 ΔU は定積モル比熱 C_v を用いて，

$\Delta U = n C_v \Delta T$ である。$C_v = \dfrac{5}{2}R$ なので，　$\dfrac{5}{2}nR\Delta T$

⑪　$P\Delta V$

⑫　化学より　質量＝モル質量×物質量なので，　$\dfrac{m}{\mu}$