光電効果

１．光電効果

⑴　粒子とは

電子、原子、原子核などは粒子である。粒子は同時に同じ位置にいることはできない。ある粒子が存在する位置に他の粒子が入ってくると、衝突することによって、その粒子に弾き飛ばされるか、逆に相手の粒子を弾き飛ばすかする。その粒子の存在位置、速度ともに明確である。

⑵　波動とは

それに対して、波はある範囲で媒質が振動している現象をさす。光、電波、音などは波である。波は別の波と同じ位置で重なってゆれることができる。これは波の重ねあわせである。そのために、音や光が互いに逆方向からやってきたときに衝突することで相手の波を弾き飛ばしたりすることなく、すれ違うことができる。そして、波はある範囲でゆれているわけであり、その場所を特定することができない。

⑶　光の粒子性と波動性

光は狭いところを抜けると**回折**現象を起こし、別の媒質中に入ると**屈折**現象を起こす。また、光の経路が少し異なると**干渉**を起こし、光は別の光を弾き飛ばすこともない。これらの現象は、光は波動であるとすれば説明できるのであるが、光が粒子であると考えると説明できない。

さらに光の性質として**光電効果**というものがある。金属に光を当てたとき、その金属の表面から電子が飛び出してくるという現象である。ビデオカメラはこの現象を利用して光を電気に変えているのである。この現象は光が粒子であると考えれば説明がつくのである。つまり、光の粒子が電子に衝突することにより電子を弾き飛ばしたと考えればよい。しかし、光が波動であると考えれば、この光電効果は説明できないのである。波動は粒子を振動させるが弾き飛ばすことはできない。水面に浮かぶ船が波を受けて宙に浮くことがあるであろうか？そのようなことは絶対ない。水面波は船を揺らすのみである。このように、光が波であるとしたら、電子を振動させるが弾き飛ばすことはないのである。

それでは光は粒子なのか？波動なのか？光が波であるとすると光電効果を、粒子であるとすると回折、屈折、干渉をまったく説明できない。このように光がどちらであると仮定しても相手の現象をまったく説明できないのである。光は波か粒子かというのは長年研究者を悩ます難題であったが、現在では、

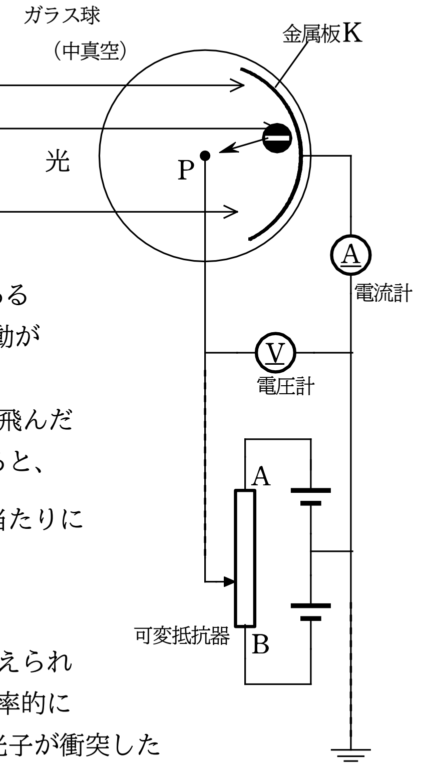
「光は波であると同時に粒子である」

と解釈されている。都合のいい解釈のようであるが、このように考えないと光の諸現象を説明できないのであるからやむをえない。

このように解釈されると、粒子であると同時に波であるとは一体どういったイメージのものか？という疑問がわいてくるが、これを時間をかけてじっくりと解説して行くことにする。

⑷　光電効果の実験

光が粒子であると同時に波であるとすれば、波動としての振動数･波長･振幅などの性質は粒子としての運動量･運動エネルギー･粒子数（質量･速度）とどのような関連性があるのだろうか？まずその点を実験によって調べてみよう。この性質を調べる実験装置が下の図である。



まず、この実験装置の説明から始めよう。
真空のガラス球の中に金属板を設置し、その凹面を球の中心に向けておく。球の中心部に小さい金属球Pを置く、このようにしておくと、ガラス球の外から入射した光が、金属板Kにあたり、この金属板Kから光電効果により電子が飛び出す。

金属板Kから飛び出した電子は金属球の中心にある金属球Pに飛び移る。このとき、PK間で電荷の移動があったことになり、電流が流れたのと同じである。
この電流を電流計で測定することにより、KP間を飛んだ電子数が測定できる。電気素量をe、電流をIとすると、電流は1秒間あたりの電荷であるから、$\dfrac{I}{e}$が1秒間当たりにKからPに飛んだ電子数となる。

光が粒子であると考えれば、電子1個は光の粒子（以後光子と呼ぶ）1個が衝突して飛び出したと考えられる。光子2個が同時に衝突することもありうるが確率的にかなり低いので無視しても差し支えない。また、光子が衝突した電子がすべて金属から飛び出すわけでもないが、飛び出した電子数が2倍になれば、光子の数も2倍であったと考えられるので、この$\dfrac{I}{e}$は光子数を意味していると考えてよい。

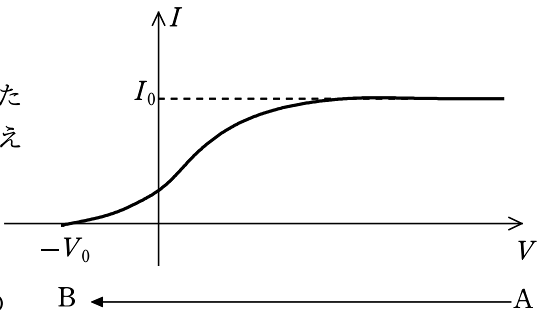
「電流計の読みは光子数を意味する」

次に実験装置下部の電池と可変抵抗器であるが、これはKP間の電位差を調整するためにつけている。金属板Kはアースしてあるために電位は0である。それに対して、2個の電池の中央をアースしているために、可変抵抗器の中央に接点を持ってきたときのP点の電位が0で接点をBのほうに動かせばPの電位は負になり、Aに動かせばPの電位は正になる。このように、可変抵抗器を使って、Pの電位を調整できるようにしてある。そのPの電位を測定するのが電圧計である。

次にこの電圧計の読みの意味するところを考えてみたい。

＜実験１＞

この実験装置に一定の光を当てながら、可変抵抗器の接点をA→Bの方向にゆっくりと動かし、そのときの電圧計と電流計の値を読み取る。その結果が、下のグラフである。



先ほど述べたとおり電流計の読みはKP間を飛んだ電子数を意味している。
Pが＋電位のときは金属板から飛び出した電子がすべてPに引かれて移動したと考えられる。Pの電位が少し低くなっても飛んだ電子の数は変わらない。これは、光電効果で飛び出した電子すべてがP点に移動したためであると考えられ、そのときの電流値I_0は光電効果で飛び出した電子数を意味していることになる。その電子数は、$\dfrac{I_0}{e}$である。

可変抵抗器の接点をBの側に近づければ、電流は少しずつ減少する。金属板に当てる光の量は変わらないので、この減少分は飛び出した電子が再び金属板Kに逆戻りしたことを意味している。Pの電位が低いと飛び出した電子は逆戻りするのである。さらにPの電位を下げて0にしたときも電流は流れている。これはKP間が同じ電位であることを意味しており、飛び出した電子に力は作用していない。それなのに、電子はP点に届いているのである。Pの電位が0でもP点に電子が届くということは、電子は金属板からある初速度を持って飛び出していることを意味する。この電子は光子と衝突して飛び出すのであるから、この電子の運動エネルギーは光子からもらったとしか考えられない。
「電子は光子から運動エネルギーをもらう」
粒子どおしの衝突は正面衝突もあれば、かする程度の衝突もあり、飛び出した電子の運動エネルギーはさまざまであると考えられる。中には光子の持つ運動エネルギーを100%受け取った電子もあるであろう。この電子の運動エネルギーを測定すれば光子の運動エネルギーを測定したことになる。電子は光子のエネルギーを100%より多く受け取ることはありえない。そのために、飛び出した電子の最大運動エネルギーを測定すれば、その電子の運動エネルギーは光子の運動エネルギーを100%受け取ったことになる。

そこで、P点の電位をマイナスにしてみる。P点がマイナスになったときは、飛び出した電子は運動エネルギーを失う。P点の電位が$-V_0$だったとき、電気量$-e$の電子がP点に届くには、電圧は＋1Cを運ぶ仕事であるから、e[C]を運ぶ仕事はeV_0となる。eV_0以上の運動エネルギーを持っていないとP点に届かないのである。

そこで、接点をBのほうに徐々に動かしていき、P点の電位をさらに下げていくと、P点の電位が$-V_0$になったときに電流が0になったとする。これ以下の電位ではまったく電子が届かないことを意味しており、最大エネルギーの電子は$-V_0$でかろうじてP点に届いたことになる。よって、電子の初速度をvとすると、

$$eV_0=\frac{1}{2}mv^2$$

なる関係が成り立つ。
「電流計の読みが0にあるときの電圧計の読みが電子の最大運動エネルギーを意味す

る」

となる。

　これ以後の実験はこのI_0とV_0の読み取りで行なうことにする。

２．光の波動性と粒子性との関係

＜実験２＞

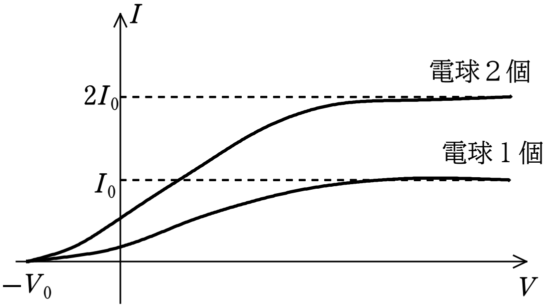
　光電効果の実験装置•グラフの見方が分かったところで、いよいよ実験に取り組もう。ここでは、まず、光の明るさと粒子としての性質とのかかわりを実験で確認してみたい。単振動のところで証明したように単振動のエネルギーは

$$E=2\pi^2 mf^2A^2$$

であり、振動数の2乗と振幅の2乗に比例することが分かっている。波動は単振動する媒質の連続運動であるから、波動のエネルギーも振幅の2乗と振動数の2乗に比例するといえる。人の目は多くの光エネルギーを受け取れば明るいと感じるので、振動数が同じ光ならば振幅の２乗が明るさを意味することになる。

「振幅の２乗が光の明るさを意味する。」

これが、明るさの波動としての性質である。それでは、粒子としての性質を確認してみよう。この実験装置に電球１個と電球２個の光を当てたとき、電流と電圧の関係がどうなるかを調べればよい。電球が２個になれば当然ながら明るさは２倍である。



　この実験結果が右のグラフである。このグラフを見ると、電球を２個（明るさ２倍）にしたとき、最大電流が２倍になっている。このことは、明るさが２倍になることは光子数が２倍になることを意味している。しかし、最低電圧$-V_0$の値は変わらない。これは、明るくなると、光子の数は増えるが１個１個の光子の運動エネルギーは変わらないことを意味している。よって、

「光子数が光の明るさを意味する」

といえる。

　この２点を整理すると、

「光子数は振幅の２乗に比例する」

といえる。このことより、

「振幅のないところに光子は存在しない」

これは後々よく使うのでよく確認しておくこと。

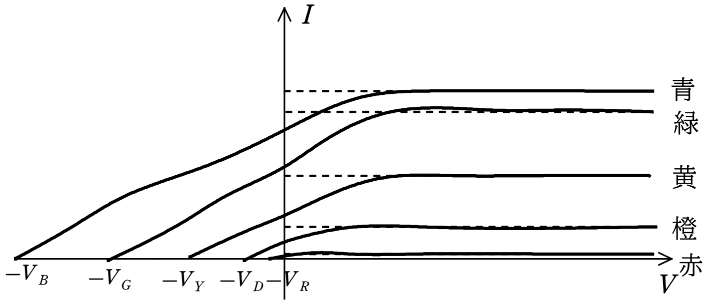
　電球が２個になると、飛び出す光子数は２倍になる。これは考えてみれば当たり前である。当たり前の結果が出たに過ぎないが、改めて、この事実は光子は粒子であることの確認となる。

＜実験３＞

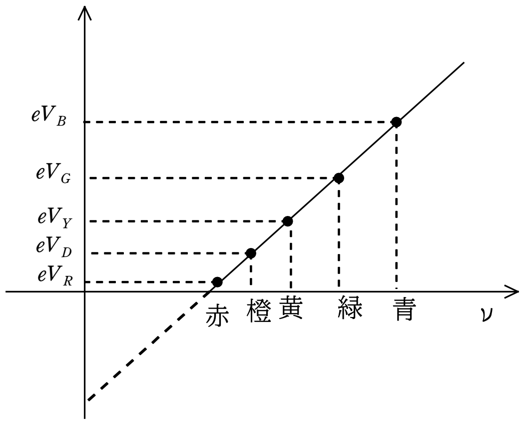
最後に光の振動数を変化させたとき電流と電圧の関係はどうなるであろうか?光の振動数は光の色である。可視光線は780nmから380nmまでの光で、赤橙黄緑青藍紫と徐々に色が変わる。

「光の振動数は光の色を意味する」

この実験装置にさまざまな色の光をあてて、このグラフがどのように変化するかを確認し、それを元に、光の性質を考えてみたい。



実験2では最低電圧に変化がなかったが、実験3では変化している。光の振動数が高くなるほど最低電圧は低くなっているようである。そこで、各振動数の光で飛び出した電子の最大運動エネルギーeV_0を縦軸にとり、横軸に光の振動数νをとってみた。すると、右図のグラフのようになる。

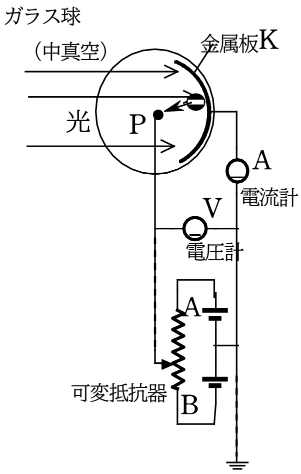


これは、電子の運動エネルギーと光の振動数は一次関数の関係になっている。つまり直線関係になっているのである。このグラフの傾きをh、切片を$-W$とすると、電子の最大運動エネルギーKは

$$K = h\nu - W$$

となる。

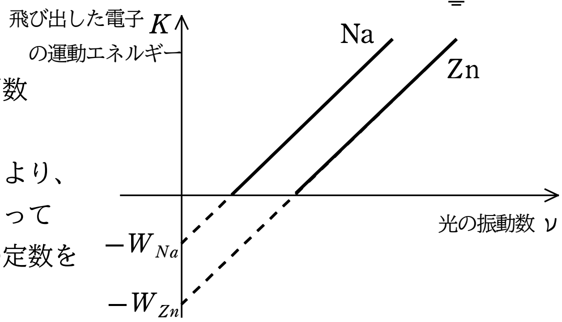
ここで、Kはエネルギーであるので、$h\nu$もWもエネルギーを表わしている。



これらは何のエネルギーであろうか？

そのエネルギーの候補として考えられるのが光のエネルギーと金属板の位置エネルギーである。これを確認するために、金属板Kの材質を変えてみた。

今までの実験では金属板はNa金属を用いていた、Na金属は第一イオン化エネルギーの小さい金属なので、電子が飛び出しやすいと考えられるので用いた。この金属をZnに置き換えてみた。その結果下のグラフのようになった。



金属板KをNaにしてもZnにしてもグラフの傾きは同じで、切片のみ変化している。

このことから考えて、グラフの関数

$K=h\nu-W$

のWは金属板の種類を変えることにより、変化しているので、金属の種類によって変わる定数ということになる。この定数を**仕事関数**という。

そうすると、$h\nu$は光のエネルギーということになる。よって光子1個の運動エネルギーEは

$E=h\nu$

で表わされることになる。ここで、hはプランク定数という。

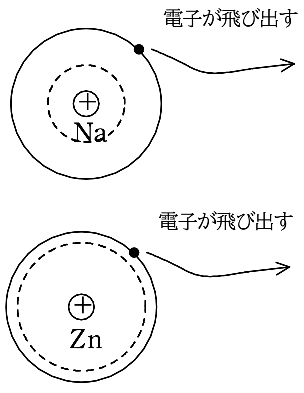
$h=6.673\times10^{-34}$[J/s]

と測定されている。

これにより、光子の運動エネルギーは振動数に比例することになる。よって、

「光の波動としての振動数は粒子としての運動エネルギーと対応している。」

- 仕事関数とは

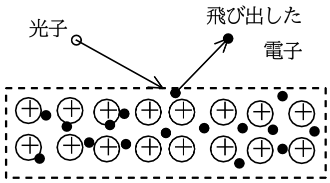


右図はNa原子とZn原子の原子核と最外殻電子1個を示したものである。そして、点線の円は最外殻電子に作用するクーロン力を表わしている。この点線の円が大きいほど、原子核は電子を強くひきつけ、小さいほど原子核が電子をひきつける力が弱い。この図を見て判断できることはNaは電子が原子から飛び出しやすく、Znは電子が飛び出しにくいことを意味している。

これは、化学でいうところの第一イオン化エネルギーである。第一イオン化エネルギーは原子から電子1個を引き離すのに必要なエネルギーであるが、ここでいう仕事関数は原子集団から自由電子1個が飛び出すエネルギーとな

るので、厳密には一致しないが、大小関係はほぼ一致するものがある。つまり、第一イオン化エネルギーが小さい金属は仕事関数も小さいのである。

金属中の自由電子に光子がぶつかるということによって、自由電子は光子のエネルギー$h\nu$を受け取り、その一部Wを金属表面から飛び出すのに使い、残りのエネルギーkで電子が飛び出すのである。



そのために、

$K = h\nu - W$

が成立するのである。

「光子1個の運動エネルギーは$h\nu$で表わされる。」

「振幅の2乗が光子数を表わす。」

これによって、光の波動としての性質と、粒子としての性質をつなぐことができた。

３． 光の運動量

光の運動エネルギーは$h\nu$で表わされる。この光が電子に衝突することにより、電子が原子（金属）から飛び出すのが光電効果である。このことは、光のエネルギーをもらって電子の速度が変化していることを意味している。電子速度が変化することは光が運動量を持っていることになる。光の運動量はどのようにして表わされるのであろうか。

(1) 通常粒子の運動量と運動エネルギーとの関係

速度v_0で動いている質量mの物体に力Fでs動かしたところ速度がvになったとすると、

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0{}^2 = Fs$$

これが微小時間dtで行なわれた場合、移動距離sはvdtとなる。このとき、運動エネルギーがEから$E + dE$に変化したとすると、上の式は

$$E + dE - E = dE = Fvdt$$

ここで、運動方程式$F = ma$より、

$$dE = mavdt$$

加速度$a = \dfrac{dv}{dt}$を用いると、

$$dE = mvadt = mv\frac{dv}{dt}dt = mvdv$$

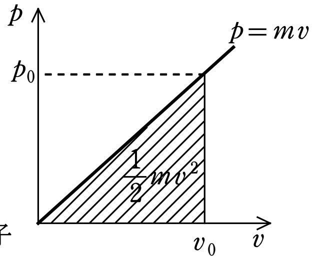
よって、

$$\frac{dE}{dv} = mv$$

この式は運動エネルギーを微分すると、運動量になることを意味している。実際、運動エネルギー$\dfrac{1}{2}mv^2$を速度vで微分すると、運動量mvとなっている。逆に言うと、運動量を速度で積分すると、運動エネルギーになるということである。

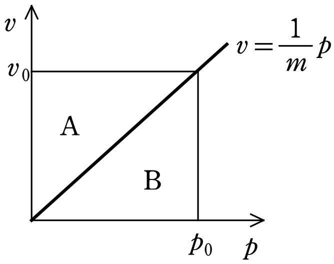
「運動エネルギーと運動量は微積関係にある。」

これをグラフで表わすと右のようになる。
ここで、運動量をpで表わし、縦軸をp横軸をvで表わしたときのグラフ下の面積が、運動エネルギー$E=\frac{1}{2}mv^2$である。



しかし、ここでの論は通常粒子に関してのものであり光子に関してのものではない。光子と通常粒子との違いは、通常粒子は静止状態から徐々に加速して運動エネルギーを得ることができるが光子は光速以外で移動できない。つまり物体から飛び出した瞬間に光速なのである。この状態を考慮するために、上のグラフの縦軸と横軸を入れ替えて考えることにする。

右の図は上の図の縦軸と横軸を入れ替えただけであるから上の図のグラフ下の面積は右のグラフでのAの領域の面積となる。この面積はB領域と同じであるから、B領域も物体mの運動エネルギーを表わしている。



＜証明＞

$$\int_0^{p_0} v\,dp=\int_0^{p_0}\frac{p}{m}dp=\frac{{p_0}^2}{2m}$$

ここで、$p_0=mv_0$とすれば、

$$\int_0^{p_0} v\,dp=\frac{{p_0}^2}{2m}=\frac{1}{2}m{v_0}^2$$

といえる。

⑵　光子の運動量

このグラフも通常粒子についてのグラフになる。光子の場合このグラフはどのようになるのであろうか。光子は先ほど述べたとおり光速度c以外で動くことはできない。しかし、光の運動エネルギーが$h\nu$であり、同じ光速度であっても振動数によって運動エネルギーが異なるので、同じように振動数が異なれば運動量も異なると考えられる。つまり、光子は運動量が変化しても速度は光速度である。グラフに表わすと、

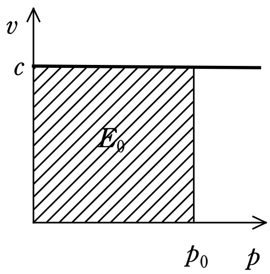
この場合もグラフ下の面積が運動エネルギーE_0であるといえる。その結果、

$E_0=p_0c$

が成り立つ。一般的には

$E=pc$

となるのである。これより光子の運動量pは



$$p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}$$

ここで、波動一般の式$v=f\lambda$において、光の場合は$v=c$、$\nu=f$であるので、$c=\nu\lambda$となる。この式を用いると。

$$E=h\nu=\frac{hc}{\lambda}$$

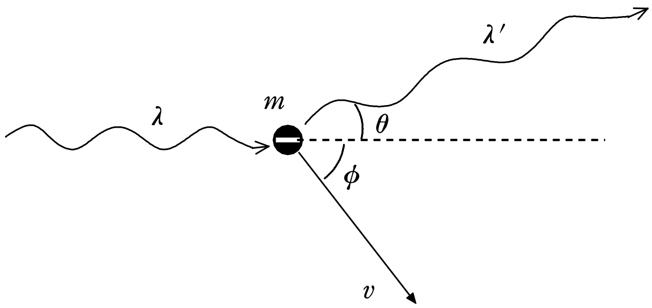
$$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$$

となるのである。

４．　コンプトン効果

光子の運動量が$\frac{h}{\lambda}$で表わされることを、実験的に確認してみよう。運動量が$\frac{h}{\lambda}$であるとして立てた方程式が実験によって成立が確認されれば良いのである。

静止している電子に波長λの光子（X線）が衝突し光子は波長λ'となって角度θの方向に進み、電子は角度ϕの方向に速度vではじけ飛んだとする。このとき、エネルギー保存則と運動量保存則はともに成立しているはずである。このとき、光子の運動エネルギーの一部が電子の運動エネルギーに変わるので、光子の運動エネルギーが失われる。そのために、電子をはじいた後の光子の波長は少し長くなっている。このように、電子と衝突することにより光子の波長が長くなる現象をコンプトン効果という。



ここでまず、運動量保存則とエネルギー保存則で、方程式を立ててみる。

エネルギー保存則

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{hc}{\lambda'} \quad \cdots①$$

運動量保存則（水平方向）

$$\frac{h}{\lambda}=\frac{h}{\lambda'}\cos\theta+mv\cos\phi \quad \cdots②$$

運動量保存則（縦方向）

$$0=\frac{h}{\lambda'}\sin\theta-mv\sin\phi \quad \cdots③$$

ここで、電子の速度vおよび角度ϕは金属内のことであるから測定不能である。よって、この三式よりvおよびϕを消去する。

まず、ϕを消去する。考え方として、数学公式$\sin^2\phi+\cos^2\phi=1$を使うこととする。

$$(mv\sin\phi)^2+(mv\cos\phi)^2=m^2v^2$$

これに②③の式を代入すると、

$$m^2v^2=\left(\frac{h}{\lambda'}\sin\theta\right)^2+\left(\frac{h}{\lambda}-\frac{h}{\lambda'}\cos\theta\right)^2$$

$$=\frac{h^2}{\lambda'^2}+\frac{h^2}{\lambda^2}-2\frac{h^2}{\lambda\lambda'}\cos\theta$$

これより、

$$mv^2=\frac{h^2}{m}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-2\frac{\cos\theta}{\lambda\lambda'}\right)$$

これを①に代入すると、

$$\frac{hc}{\lambda}=\frac{1}{2}\frac{h^2}{m}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-2\frac{\cos\theta}{\lambda\lambda'}\right)+\frac{hc}{\lambda'}$$

簡単にして、

$$\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda'}=\frac{h}{2mc}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-2\frac{\cos\theta}{\lambda\lambda'}\right)$$

これは、

$$\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda\lambda'}=\frac{h}{2mc}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda'^2}-2\frac{\cos\theta}{\lambda\lambda'}\right)$$

ここで、この実験においてλ'はλとほとんど同じ値で、λ'はλより少し大きい。よって、$\lambda'\fallingdotseq\lambda$となるため、

$$\lambda^2\fallingdotseq\lambda'^2\fallingdotseq\lambda\lambda'$$

といえる。これを用いて上の式の分母を払うと、

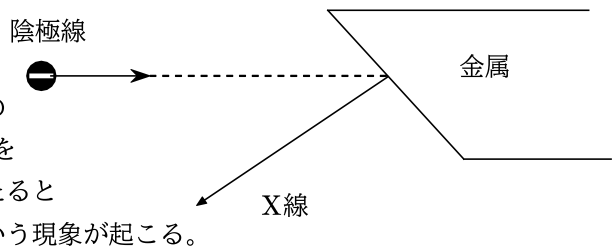
$$\lambda'-\lambda=\frac{h}{mc}(1-\cos\theta)$$

となる。この式の変数λ、λ'、θはいずれも測定可能である。実験により、この式が正しいことが立証され、同時に光の運動量pが、$p=\dfrac{h}{\lambda}$で表わされることが証明されたのである。

５． X線

(1) X線の発生

金属板に高電圧で加速した電子（陰極線）をあてると金属表面から波長の短い電磁波が発生する。この電磁波の波長は0.01μm以下であり、物質を貫通する能力が高く、人体に当たると骨のみがスクリーン上に移るという現象が起こる。この電磁波をX線と呼んでいる。

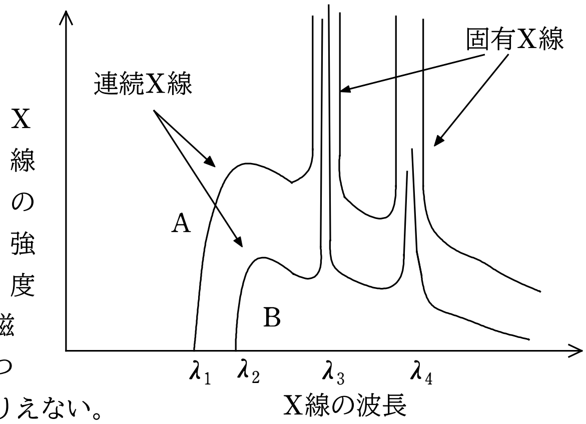


電磁誘導の原理により電場が変化すると磁場が変化するために電磁波が発生する。電子が加速度運動すると、周辺の電場に変化が起こるので電磁波が発生することになる。金属に打ち込まれた高速電子は金属原子核周辺に達したとき、金属原子核から大きなクーロン力を受けてその進行方向が大きく変化する。つまり、電子が加速するわけである。このときにこの電子の持っている運動エネルギーが電磁波となる。電子の運動エネルギーの一部

が発生する電磁波の運動エネルギーに変わる。電子の運動エネルギーが大きいとき、電磁波の運動エネルギーも高いため電磁波の波長が短くなりX線が発生する。

(2)　連続X線

下のグラフはある電圧で加速した陰極線をMo原子にぶつけたときに発生したX線の波長ごとの強度を示したものである。



グラフAは電子を50kVで加速したときに発生したX線の強度グラフで、Bは30kVで加速した時に発生したX線の強度グラフである。Aはλ_1以上、Bはλ_2以上の波長のX線しか発生していない。電子が原子核によって加速されたときに電磁波を発生するがその電磁波のエネルギーは、元の電子の持つ運動エネルギーを超えることはありえない。

このことより、最短波長のX線の持つ運動エネルギーは電子の運動エネルギーと等しいといえる。

このように各波長ごとに連続して強度が変化しているX線を連続X線という。

電圧Vは＋1Cの電荷を運ぶ仕事を意味するので、$-e$[C]の電子を運ぶ仕事は$-eV$[J]となる。電子がeV[J]のエネルギーをもらうことになるので、電子をV[V]で加速したときの電子の持つ運動エネルギーは、eV[J]である。

一方波長λの光の運動エネルギーは$\dfrac{hc}{\lambda}$であり、上のグラフにおけるX線の最短波長は

$$eV=\frac{hc}{\lambda}$$

となる。

よって、A、Bのグラフの最短波長は

$$\lambda_1=\frac{hc}{eV}=\frac{6.7\times10^{-34}\times3.0\times10^{8}}{1.6\times10^{-19}\times50\times10^{3}}=2.5\times10^{-11}\,\mathrm{m}=0.025\mathrm{nm}$$

$$\lambda_2=\frac{hc}{eV}=\frac{6.7\times10^{-34}\times3.0\times10^{8}}{1.6\times10^{-19}\times30\times10^{3}}=4.2\times10^{-11}\,\mathrm{m}=0.042\mathrm{nm}$$

となる。

(3)　固有X線

上のグラフには50kVで加速した場合も30kVで加速した場合も2箇所の同じ位置にX線強度が異常に強い波長が存在している。この波長（λ_3、λ_4）のX線を固有X線（または特性X線）という。

このX線は高電圧で加速された電子が金属にぶつかったときに、その原子の軌道電子に衝突しその電子を弾き飛ばしてしまったときに発生したX線である。

Moなどは巨大原子であるので、電子殻はK,L,M,N,O殻と多数存在している。K殻あた

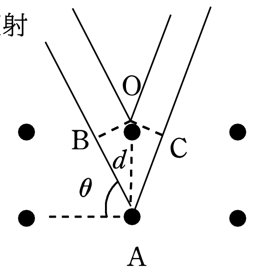
りに存在している電子を弾き飛ばしてしまった場合、その上の軌道を回っている電子がK殻に落ちてくる。K殻の電子のエネルギーが最も低いため、上の軌道から落ちてきた電子はエネルギーがあまってしまう。このエネルギーがX線として放出されるのである。

この場合原子軌道のエネルギー差は特定の値に決まっているので、この過程によって放出されるX線の波長はすべて同じものになってしまう。そのために、特定の波長のX線強度が異常に高くなる。

６．フラッグ反射

格子結晶にX線をあて、X線の干渉を調べることにより格子間隔を測定することができる。その方法を考えてみよう。

結晶面に対して角度θで波長λのX線が入射したとする。結晶表面の原子で反射したX線と１列だけ奥の原子で反射したX線が干渉を起こす。



入射したX線の波面OB、OCを記入する。格子間隔をdとすると、2本のX線の経路差は

$\mathrm{BA}+\mathrm{AC}=2\mathrm{BA}=2d\sin\theta$

となる。

X線は原子に反射するときは固定端反射をするが、両方とも固定端反射をするので、X線が強めあう条件はmを整数として

$2d\sin\theta=m\lambda$

となる。この式が成立しているとき、X線が強め合っている。

$m=0$の時に$\sin\theta=0$でこの等式が成立している。$\theta=0$であるので、結晶面と水平にしたときに強め合っていることになる。角度θを徐々に大きくしていき次にX線が強めあった角度を測定することにより、格子間隔dを測定できる。その角度がθ_0であったとして、格子間隔dを求めると、この場合$m=1$であるから、

$$2d\sin\theta_0=\lambda \qquad よって、\qquad d=\frac{\lambda}{2\sin\theta_0}$$

これが格子間隔である。

７．物質波

光子は波動であると同時に粒子である。波動の振幅は粒子の粒子数に該当し、波動における振動数は粒子における運動エネルギーを意味していることが分かった。このように波動性と粒子性を兼ね備えた粒子は光子だけであろうか？光子以外にそのような粒子はないのであろうか。

(1)　物質波の波長

結晶に電子線をぶつけたときにその電子線に干渉縞が生じる現象が発見された。電子が粒子であり波動でなければ、干渉縞は生じないはずである。干渉縞が生じるということは電子も粒子であると同時に波動であることになる。その後の研究で、陽子･中性子などすべての粒子で波動性を示す現象が見つかった。

「すべての粒子は粒子であると同時に波動性を持つ」

ということになったのである。このように粒子を波動として考えるときにその波を**物質波（ド･ブロイ波）**という。

物質波としての基本的性質は光子と同じと仮定して、粒子の性質を考えてみよう。まず、物質波の波動の性質を考える上で最も重要なものはその波長である。光子と同じと考えれば、その運動量または運動エネルギーの式がそのまま使えるはずである。運動量の場合、

$$p=\frac{h}{\lambda} \quad より、\quad \lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{mv} \quad \cdots ①$$

運動エネルギーの場合

$$E=\frac{hc}{\lambda} \quad より、\lambda=\frac{hc}{E}=\frac{2hc}{mv^2} \quad \cdots ②$$

①と②は同じ結果にならない。光子と通常粒子との違いは光子が光速しか存在しないのに対して通常粒子は徐々に加速するのである。②は加速段階での積分を行なっているので、通常粒子にしか通用しない式と考えられる。そこで、①の方が正しいことになる。これは、実験でも確認された。よって、物質波の波長は

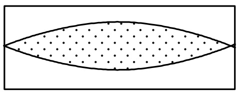
$$\lambda=\frac{h}{mv}$$

と表わされることになる。

⑵　箱の中の電子

物質波と粒子の関係をここまでの論を元に考えてみよう。

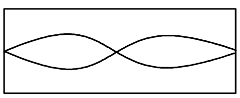
長さLの箱の中に電子を1個入れる。この電子は水平方向に速度を持っているとする。電子が完全静止状態であれば$\lambda=\dfrac{h}{mv}$で$v=0$であるから、波長は無限に大きくなる。



箱の中で波動が生じているとき、この波は箱の両端で反射（固定端反射）するので、箱の中に定常波ができる。物質波の場合も同様と考えられる。この状態で、波長が無限大になることは考えられない。

「箱の中の電子は静止できない」

のである。これは静止できない光子と同じである。$\lambda=\dfrac{h}{mv}$より、波長が長いほど電子速度は小さいので、この定常波での最長波長は$\lambda=2L$である。よって、電子の最低速度は$\dfrac{h}{2mL}$となる。次に長い電子の波長は2倍振動のときで波長は$\lambda=L$なので電子の速度は$\dfrac{h}{mL}$となり、基本振動のときの電子速度の2倍である。そして、この間の速度は存在しないのである。箱の中の電子に外部から光子が入ってきて電子がその光子のエネルギーを吸収したとき、瞬時にしてその速度が2倍にならなければならない。仮に1.5倍になるエネルギーしか光子が持たないなら、その光子のエネルギーを電子が吸収できない。つまり、光子のエネルギーを吸収しないということになる。

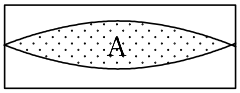


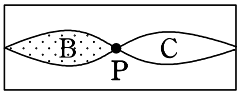
物質波の波長として存在が可能なのはn倍振動のとき、$\lambda=\frac{2}{n}L$であるため、電子の速度vは$\frac{nh}{2mL}$となり、電子速度は基本振動時の速度のn倍の速度しか許されないことになる。このことは、電子の速度は常に必要なエネルギーを光子から吸収したとき、瞬時にして電子の速度が速くなり、逆に光子を放出して瞬時にして遅くなるということである。そして、吸収できる光のエネルギーは電子が許される速度に変われるときのみであり、それ以外は光子を吸収できない。

「電子の速度は飛び飛びの値しか許されず、瞬間的に速度変化する」

といえる。

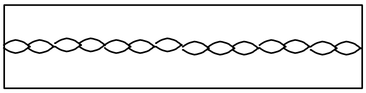
次に電子の存在領域であるが、基本振動のときA領域で電子の物質波が同時に振動している。電子はA領域で同時に存在しているといえる。光子の場合振幅の2乗が光子数を表わしているので、電子の場合も同じと考えられる。振幅の大きい場所に電子が数多く存在することになるのであるが、この場合電子は1個しか存在しない。これはどう考えればよいのか。これを存在確率（詳しくは大学で）と考えるのである。振幅が大きいところは電子が存在する確率が高いとするのである。





ともあれ、電子はA領域に同時に存在しているのである。これが、2倍振動になったとき、P点では振幅がない。振幅がないということは電子が存在しないということであるから、P点に電子は存在できないのである。2倍振動になった場合、ある瞬間にB領域に電子が存在した次の瞬間C領域に電子が存在することになるが、BからCに電子が移動するときにその間のP点を通過してはならないのである。つまり、BからCへの瞬間移動と考えられる。電子はB,C、B,Cと瞬間移動の繰り返しで移動していることになる。

右図は14倍振動の場合である。この場合となりの腹に移動するには$\frac{L}{14}$だけ瞬間移動すればよく、また、速度も次の15倍振動になるまでの$\frac{15}{14}$倍の速さになればよいのである。つまり、電子の速度が速くなるにつれ細かく移動し、細かく速くなる事ができるのである。これは、次第に連続運動のようになってくる。つまり、波長が短くなるにつれて連続運動と区別ができなくなり、これが通常観測している電子の姿といえる。つまり、波長が短いほど粒子の性質が強くなり波長が長いほど波動としての性質が高くなるといえる。



「波長が短いほど粒子性が強くなり、波長が長いほど波動性が強くなる」

となる。

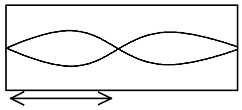
物体の大きさ（箱の大きさ）が波長程度のときは、粒子性と波動性の両方を考えなければならず、物体の大きさよりも波長がはるかに小さいときは粒子性のみ考えればよく、逆に波長が物体よりもはるかに長いとき波動の性質のみ考えればよいことになる。このようにして粒子性と波動性を使い分ける必要がある。

⑶　金属内の自由電子

箱の中の電子と同じような状況にあるのが金属内の自由電子である。金属内の自由電子の振る舞いについて考えてみよう。簡単のために長さLの直線上の金属と考えることにする。電子はこの金属内で往復運動をしており、電子波の干渉により定常波を生じている。n倍振動の定常波であるとすると、

$$L=n\frac{\lambda}{2}$$

が成立する。



ここで、電子波の波長は$\lambda=\dfrac{h}{mv}$

であるので、$L=\dfrac{nh}{2mv}$となる。よって、$v=\dfrac{nh}{2mL}$

電子の持つ運動エネルギーE_nは

$$E_n=\frac{1}{2}mv^2=\frac{n^2h^2}{8mL^2}$$

ここで、nは整数値であるために、$n=1,2,3\cdots$となる。よって、電子の持つ運動エネルギーは$\dfrac{h^2}{8mL^2}$、$\dfrac{4h^2}{8mL^2}$、$\dfrac{9h^2}{8mL^2}\cdots$と飛び飛びのエネルギーしか許されなくなる。このエネルギーを**エネルギー順位**、nを**量子数**という。$n=1$の状態が最もエネルギーが低くこの状態を基底状態という。エネルギーが低い状態が最も安定なので、電子はエネルギーが低い状態から順次詰まっていく。

$n=1$（$\dfrac{h^2}{8mL^2}$）の状態にある電子に外部から光子がやってきた場合、次の、$\dfrac{4h^2}{8mL^2}$の状態になれるだけのエネルギーを光子が持っていれば、電子はこの光子のエネルギーを吸収して、エネルギーの高い状態（$n=2$）に飛び移ることができる。この状態を**励起状態**という。光子がそのエネルギーを持っていない場合、電子は光子のエネルギーを吸収することはできない。よって、この金属は特定の波長の光のみを吸収し、そのほかの光は吸収しない。このような粒子の性質を扱う学問を**量子力学**という。

また、励起状態にある電子は、しばらくすると、光子を放出してより安定な状態に戻ろうとする。このときに放出する光子のエネルギーはエネルギー順位の差の分に相当する。

$n=1$の状態から$n=2$の状態になるには電子の持つエネルギーが4倍にならなければならないが、$n=100$の状態から$n=101$の状態になるにはその２乗倍のエネルギー増加になるので、約2%のエネルギー増加でよいことになる。よって、電子のエネルギー状態が高い（温度が高い）とき、電子は連続的に変化するのと大きな差はない。電子が波の性質を強く出すのはエネルギー状態が低いときに限られる。