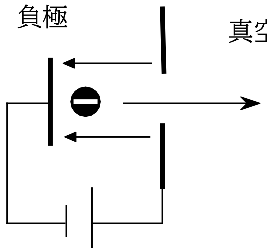
陰極線

１． 陰極線

(1) 陰極線とは

負極と中央に穴の開いた正極間に高電圧Vをかけると、電子は極板間で加速される。通常は正極に届くのであるが、穴の位置に来た電子はその穴を抜ける。穴の外は電場がないので、穴から飛び出した電子はそのまま直進する。この電子に流れを**陰極線**という。



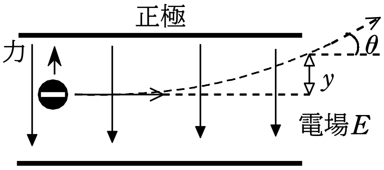
電子の電気量をe[C]、極板間の電圧をVとすると、電子が電場から受け取るエネルギーはeVである。このエネルギーが電子の運動エネルギーになるので、電子の質量をm[kg]、電子の速度をv[m/s]とすると、

$$\frac{1}{2}mv^2=eV$$

が成立する。電子は電圧に比例する運動エネルギーを得ることができる。

(2) 電場中の陰極線

速さvの陰極線が上を正極、下を負極とし、電場がEになっている金属板間に水平に進入した場合、この電子はクーロン力eEを上向きに受ける。電子はこの力を受けて上向きに加速する。この時の電子の運動方程式は



$$F=eE=ma$$

これより、電子の加速度は上方に$a=\dfrac{eE}{m}$となる。電子は上下方向のみに加速され、左右方向には力を受けないので、左右方向は等速運動となる。この運動は放物線運動である。

極板の長さをlとして、極板から外部に出る位置のずれyと、電子の飛ぶ方向角θを求めてみよう。

水平方向は等速運動となるので、電子がこの極板間を通過する時間tは、$t=\dfrac{l}{v}$であらわされる。この間に電子は加速度$a=\dfrac{eE}{m}$で上方に加速されるわけである。上方への初速度が0であることを用いると、等加速度運動の式$s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$を用いて、

$$y=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v^2}$$ となる。

また、上方への速度は等加速度運動の式$v=v_0+at$を用いて、

$$v_y=\frac{eE}{m}\frac{l}{v}$$

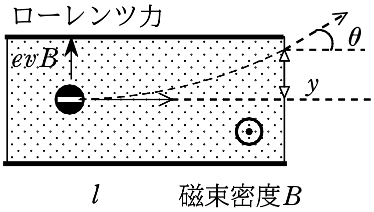
水平方向は等速なので、$v_x=v$。これより、

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eEl}{mv^2}$$

これを見て分かるように陰極線は電場によって方向が変えられるのである。これに対して、光は電場によって方向が変わることはない。

(3)　磁場中の陰極線

長さlの平行な金属板間に手前向きの一様な磁場（磁束密度B）をかけ、水平に速度vの電子を入射させた。このときの電子の位置のずれyと方向のずれ角θを求めてみよう。



この電子は磁場の中に入ったとき、速さvの等速円運動を起こす。円運動の向心力がローレンツ力となる。
電子の運動は電場の時放物線運動で、磁場の時は等速円運動であるが、lが微小値のとき、この両者の運動は区別できない。よって、放物線運動の$F=eE$を、$F=evB$と置き換えればよい。

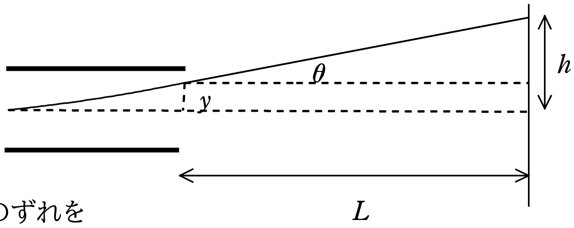
電場においては　$y=\dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}\dfrac{l^2}{v^2}$　$\tan\theta=\dfrac{eEl}{mv^2}$なので、

磁場においては　$y=\dfrac{1}{2}\dfrac{evB}{m}\dfrac{l^2}{v^2}$　$\tan\theta=\dfrac{evBl}{mv^2}$となる。

陰極線は電場だけではなく磁場によっても方向が変えられるのである。ブラウン管式のテレビは陰極線の方向を磁場や電場を使って変えることによりブラウン管上に映像を作っているのである。

(4)　スクリーン上の位置

次に平行金属板からL離れた位置におかれたスクリーン上にできる、陰極線による明点の位置を求めてみよう。磁場･あるいは電場をかけない時の位置からのずれをhとすると、右図より、



$$h = y + L\tan\theta$$

となる。

電場の場合に$y=\dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}\dfrac{l^2}{v^2}$と$\tan\theta=\dfrac{eEl}{mv^2}$を代入すると、

$$h=\frac{1}{2}\frac{eE}{m}\frac{l^2}{v^2}+L\frac{eEl}{mv^2}=\frac{e}{m}\frac{El}{2v^2}(l+2L)$$

磁場の場合は　eEにevBを代入すればよい。

$$h=\frac{e}{m}\frac{vBl}{2v^2}(l+2L)=\frac{e}{m}\frac{Bl}{2v}(l+2L)$$

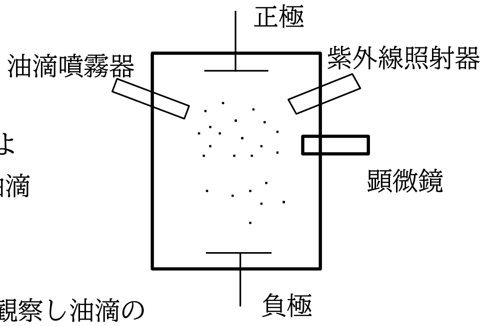
この式において、E,h,l,v,Lをあらかじめ測定しておけば、$\dfrac{e}{m}$の値を測定することができる。この値を**比電荷**という。

$$\frac{e}{m}=1.76\times10^{11}[\mathrm{C/kg}]$$

と測定された。この実験はトムソンが行ったので、**トムソンの実験**という。

２． ミリカンの実験

比電荷のみでは電子の電気量eと質量mのどちらも求めることができない。ミリカンは電子の電気量（**電気素量**という）を測定することに成功した。その実験過程を追ってみよう。



⑴ 実験装置

右図のよう箱を用意し、箱の上端に正極板を下端に負極板を設置し電圧が自由に変えられるようにしておく。この箱に顕微鏡･紫外線照射器･油滴噴霧器を設置した。

⑵ 油滴を噴霧する

実験準備が整ったら油滴を噴霧し、顕微鏡で観察し油滴の大きさと落下速度を測定する。油滴は重力によって落下するが、速度に比例する空気の抵抗があるために、等速で落下する。油滴の半径をr、落下速度をvとする。

油滴は球形と考えてよいので、油滴の体積は球の体積の公式より、$\dfrac{4}{3}\pi r^3$。この油の密度をρ、重力加速度の大きさをgとすると、この油滴に作用する重力の大きさは$\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho g$となる。空気抵抗は物体の速度$v$に比例することが分かっているので、その比例定数を$k$とすると、空気抵抗の大きさは$kv$である。湯滴は等速で落下しているために重力と空気抵抗はつりあっている。よって、

$$\frac{4}{3}\pi r^3\rho g=kv \quad \cdots \quad ①$$

となる。これによって、比例定数kが測定できる。

⑶ 紫外線照射器で油滴に紫外線を当てる

油滴に紫外線が当たると、油分子内にある電子が紫外線によって飛ばされ、油滴は電荷を持つことになる。ある油滴は電子がいくつか飛ばされ正電荷に帯電し、別のある油滴は飛んできた電子が付着して負電荷に帯電する。いずれにしても電子が整数個飛んでいるので、帯電している電気量は電気素量の整数倍となる。ある油滴がnを整数として$-ne$に帯電しているとし、外部電場をE（電場は$V=Ed$で電圧と極板間距離で求められる）とすると、この油滴が受けるクーロン力は　neE　であらわされる。この油滴も動くときに空気抵抗がかかるので、等速運動になるために力のつりあい状態になる。この油滴が上向きに速さv'で動いているとすると、上向きにクーロン力、下向きに重力と空気抵抗を受けることになり、油滴の質量をmとすると、

$$neE = kv' + \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$$

この式に①のkを代入すると、

$$neE = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g \frac{v+v'}{v}$$

この式により、E, r, ρ, v, v'を測定することにより、neの値が求められる。

(4)　電気素量の測定

複数の油滴を測定することによりneの値は求められるが、nが分からないためにeの値を求めることができない。どのようにすればeが測定できるのであろうか。nの値は各油滴それぞればらばらであるが、はっきりしていることは整数ということである。それぞれの整数値をn_1、n_2…とすると、各油滴の電気量はn_1e、n_2e、n_3e…となる。これより、eは数学でいう所の公約数になるのである。数多くの実験を行えば、eのすべての整数倍が出揃うためにeは最大公約数となる。

＜最大公約数の求め方＞

最大公約数をGとする二つの整数値AG、BG（A、Bは整数）をとるとき、$AG-BG=(A-B)G$より、その差もGを約数に含む。さらに差をとっているので前の数値よりは小さくなっている。このように差をとることを繰り返していけば最終的に最大公約数が残ることになる。

例　731と1037の最大公約数

差をとると、1037－731＝306、306の中に最大公約数Gが入っている。731にもGが入っているので、この差にもGが入っている。731－306＝425。この425の中にもGが入っている。さらに425－306を行うと119、整数倍して引き算してもGが入っていることに変わりはないので、306－2×119＝68、119－68＝51となる。引き算を繰り返すことにより次第に数値が小さくなるが、Gが入っているのは共通である。数値が小さくなるので、Gの値がはっきりと判明するのである。68－51＝17。51＝17×3であるので、この後はどれを引き算しても17より小さい自然数は出てこない。このことにより、最大公約数は17であることが分かる。

このように差をとっていけば最大公約数であるeを求めることができるのである。しかし、ここで、注意することがひとつある。先ほどの例は数学上の問題であるために測定誤差が入っていないが、この場合は測定誤差が入っている。有効数字の範囲に注意しながら引き算しなければならないのである。

＜例題＞

このような実験をして次のようなデータが得られたとき、eを求めよ。

6.40、12.78、7.99、11.21、15.99　　（$\times 10^{-19}$C）

小さい順に並べ替えると、　6.40、7.99、11.21、12.78、15.99　である。隣どおしの差をとると、　1.59、3.22、1.57、3.21

この数値は1番目と3番目がほぼ同じ1.6前後で、2番目と4番目はその2倍に近い数値である。

このことから、最大公約数は1.6前後であることが分かる。$e=1.6\times10^{-19}$Cとなるのであるが、この実験データでは有効数字3桁である。もっと精度を上げるにはどのようにすればよいのであろうか？

neのnが整数値であることははっきりとしている。これを利用してeの精度を上げてみよう。$e=1.6\times10^{-19}$C前後の数字であるとすれば、$6.40=4e$、$12.78=8e$、$7.99=5e$、$11.21=7e$、$15.99=10e$であることは容易に予想がつく。辺々足し算をすると、

$$4e+8e+5e+7e+10e=6.40+12.78+7.99+11.21+15.99$$

これは、$34e=54.37$　（54.37は少数第二位まで有効なので有効数字4桁である）

これより、$e=1.599\times10^{-19}$C

このようにして高精度に電気素量を測定することができるのである。

このような実験を**ミリカンの実験**という。

トムソンの実験とミリカンの実験により電子の電気量と電子の質量を測定することができた。

$e=1.6\times10^{-19}$C、$m=9.1\times10^{-31}$kg

ということが分かった。