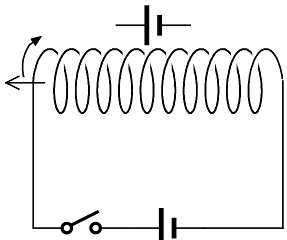
自己誘導と相互誘導

１． コイルの中の磁場



　コイルに電流を流すと磁場が発生する。この磁場の強さは巻き密度n、電流をIとすると、$H=nI$で表わされる。この磁場の強さはコイルの中心軸上の磁場の強さである。その周辺の磁場の強さはほぼ一様であるために、nIとほとんど一緒である。ここでは、コイル内の磁場が一様でその大きさがnIであるとして論を進める。

　コイルの中に透磁率μの磁性体を入れると、磁束密度Bは$B=\mu H=\mu nI$となるので、コイルの断面積をSとすると、発生する磁束Φは、$\Phi=\mu nSI$となる。ここで、このコイルの巻き数をNとするとき、このコイルの誘導起電力Vは

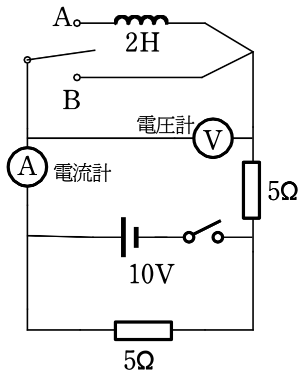
$$V=-N\frac{d\Phi}{dt}=-N\frac{d}{dt}(\mu nSI)=-N\mu nS\frac{dI}{dt}$$

となる。この式における係数$N\mu nS$を自己インダクタンスという。単位は[H]でヘンリーと読む。$L=N\mu nS$とおくと、

$$V=-L\frac{dI}{dt}$$

となる。上図でスイッチを入れるとコイルに流れる電流が増加する。それによりコイル内の磁束が左向きに増加する、その結果右向きに磁束を作るようにコイルに誘導起電力が生じる。この現象を**自己誘導**という。この場合もコイルの電池マークを書き込んで問題を解くと間違いが少ない。コイル自体の誘導起電力は電流の変化に比例する。自己インダクタンスは毎秒1Aの電流変化があるときのコイル自体の誘導起電力を意味している。

２． コイルと電流



　右図のように自己インダクタンス2Hのコイル、起電力10Vの電池とスイッチ、5Ω、5Ωの抵抗、電流計、電圧計、切り替えスイッチABを図のようにつないだ。

＜スイッチをBにした時＞

　まず切り替えスイッチをBの方に繋ぐ、この状態で時刻2秒においてスイッチを入れて電流を流すと、電流計はオームの法則により2Aの値を示す。電圧計はBの導線の電圧を測っているので電圧計の針は0を指したままである。時刻8秒にスイッチを切ると、その瞬間に電流計の針は0を指す。

　この時の電流計、電圧計の読みを表したのが、グラフの破線である。電流計の読みはスイッチを入れている時のみ2Aの電流が流れており、スイッチが切れている時は電流が流れていない。電圧計の針は、スイッチが入っていてもいなくても関係なく、針は0を指している。これは、電圧計が導線の電圧を測っているためである。

＜スイッチをAにした時＞

次に切り替えスイッチをAにした状態で、時刻2秒にスイッチを入れる。

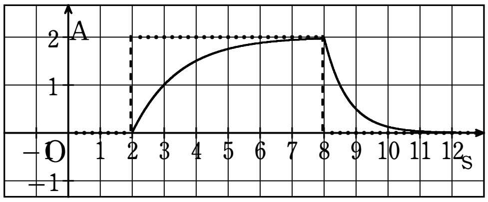
スイッチを入れるまでは、電流計・電圧計共に針は0を指している。このとき、電圧計はコイルにかかる電圧を電流計はコイルを流れる電流を測定している。

時刻2秒にスイッチを入れた。

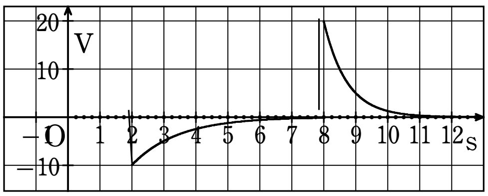
この時、スイッチを入れた瞬間に電流が流れたとすると、破線のグラフのようにその瞬間の電流の傾きは無限大となる。誘導起電力は

$$V=-L\frac{dI}{dt}$$

電流計の読み



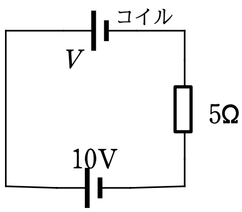
電圧計の読み



で表されるので、電流の傾きに比例するのである。その結果コイルに無限大の電圧がかかることになる。このようなことはあり得ないので、電流は必ず連続関数となる。

「コイルの存在する回路において電流は必ず連続関数になる。」

といえる。よって、スイッチを入れた直後は電流が0となる。コイルに電圧がかかっているためである。この回路をシンプルに描いたのが右図である。コイルに10Vの電圧がかかっている時、電流が0になる。この時、電圧の符号を電流の流れ（右回り）に沿って電位が上がる方向を正とする。この場合コイルは電位が下がるので、コイルの電圧は-10Vとなる。



スイッチを入れた直後　$V=-10$とすると、自己誘導の式は

$$-10=-2\frac{dI}{dt}$$

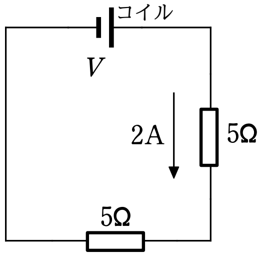
となり、グラフの傾き$\frac{dI}{dt}$は5となる。電流は傾き5で増加することになる。電流が流れ始めるということはコイルにかかる電圧が0に近づくことを意味し、電圧が0に近づけば、傾き$\frac{dI}{dt}$も0に近づくことになる。暫らくすると、コイルの電圧が0となる。その時はこのコイルは導線と同じことになるので、電流は2Aとなる。

「コイルを含む回路では最初コイルに電圧が生じるが十分に時間がたつと導線と同様に扱える。」

- 時刻8秒にスイッチを切った

コイルを含む回路では電流は連続関数となるので、スイッチを切る前に電流が2Aだったので、スイッチを切った直後も2A流れる。この回路の場合、スイッチが切れているのでスイッチの下の5Ωの抵抗に2Aが流れる。

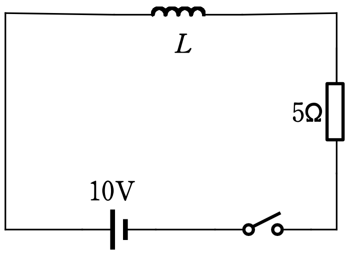
この状態をシンプルな回路で示すと右図のようになる。
この時、この回路に2A電流を流すには合成抵抗が10Ωなので、コイルの電圧は20Vとなる。流れに沿って電位が上がる方向なので、＋20Vの電圧がかかっているのとになる。
この状態から時間がたつと、コイルが導線と考えた時の電圧、電流と同じすなわち0V、0Aとなる。



３． 自己インダクタンスの大きさと電流

自己インダクタンスが大きなコイルと小さなコイルは，電流の流れ方にどのような違いがあるのであろうか。

10Vの電源に自己インダクタンスLのコイル，5Ωの抵抗，10Vの直流電源をつないだ。このとき，スイッチを入れた直後の電流変化を自己インダクタンスを変化させた状態で比較してみよう。



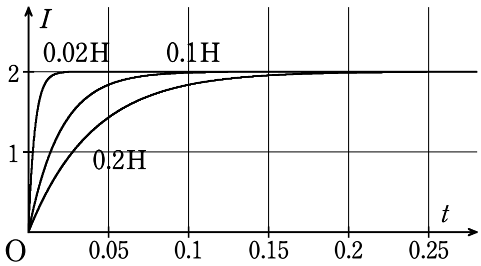
コイルに流れる電流は連続関数となるので，スイッチを入れた瞬間電流は流れない。電流を流さないためには，コイルに10Vの逆電圧がかかる必要がある。この状態を式で表すと，

$$-10=-L\frac{dI}{dt}$$

電流の増加は $\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{10}{L}$ A/s

となる。

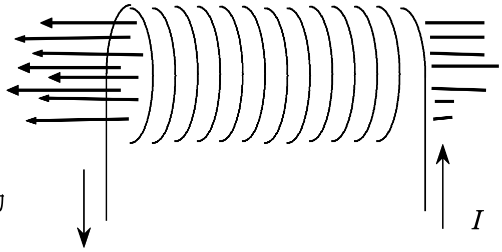
この式から明らかに自己インダクタンスLが大きいと電流増加に時間がかかり,小さいとすぐに電流が流れるということになる。
グラフで表すと右のようになる。



４． コイルの磁気エネルギー

前の回路において、スイッチを入れた後コイルがない場合に比べて、しばらくは電流が少ない。このとき電池がした仕事はコイルに蓄えられている。このコイルに蓄えられたエネルギーを使って、スイッチを切った後しばらく電流を流すことができるのである。コイルにはどのような形でどれぐらいエネルギーが蓄えられているのであろうか考えてみよう。

コイルに電流を流すとコイル内に$\Phi=\mu nSI$であらわされる磁束が発生する。電流が多



くなればなるほど、数多くの磁束線が発生するわけである。ところが磁束線は棒磁石と同じなので、互いに反発する能力をもつ。電流を増加させるとこの磁束線を詰め込むのにエネルギーを使う。電流を切ったとき、磁束線は互いの反発力によってコイル内から外へ広がる。

このときに導線を横切ることによって発電するのである。よって、コイルにたまるエネルギーとは磁束線どおしの反発力による位置エネルギーといえる。

電流がI流れているときコイルにたまっているエネルギーをEとする。この状態からdt秒間に電流がdIだけ増加したとすると、起電力Vは$-L\frac{dI}{dt}$であるから、外部電流がコイルに対してする仕事は，逆向きの電圧$L\frac{dI}{dt}$がする仕事となり,電気量Idtを運ぶので，

$$W=VIdt=IL\frac{dI}{dt}dt=LIdI$$

である。ここで、電流が0の状態からI_0の状態まで合計すると、コイルにたまるエネルギーUは

$$U=\int_0^{I_0}LIdI=\frac{1}{2}LI_0{}^2$$

となる。これが、コイルにたまった磁気エネルギーである。

このエネルギーを自己インダクタンス$L=N\mu nS$を用いて、

$$U=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}N\mu nSI^2$$

ここで、コイルの長さをlとすると、$N=nl$（nは1mあたりの巻き数）であるから、

$$U=\frac{1}{2}N\mu nSI^2=\frac{1}{2}\mu n^2I^2Sl$$

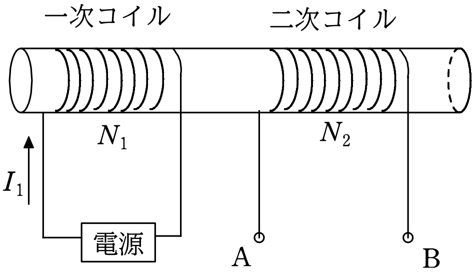
また、$H=nI$より、

$$U=\frac{1}{2}\mu H^2Sl$$

ここで、Slはコイル内の体積であるから、コイル内の空間1m^{3}あたり、$\frac{1}{2}\mu H^2$の磁気エネルギーがあることになる。これは，コンデンサーの単位体積あたりの静電エネルギー$\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$とよく対応している。

５． 相互誘導

⑴　二次コイルに電流が流れない場合



右図のように1本の磁性体2箇所にコイルを巻きつけた。この状態で電流を流すほうのコイルを一次コイルといい、もうひとつのコイルを二次コイルという。一次コイルと二次コイルが離れていると、一次コイルから二次コイルまでの間で磁束線が外部に漏れるために二次コイルの磁束は一次コイルよりも小さくなるが、出題される問題では二次コイル内の磁束は一次コイルと同じ磁束と考えてよいとなっている。

この仮定により、一次コイルで発生する磁束はすべて二次コイル内に入るので、一次コイル内で磁束が変化すると、二次コイル内の磁束が変化する。その結果、二次コイルに誘導起電力が生じる。この現象を**相互誘導**という。

一次コイルの巻き数をN_1、二次コイルの巻き数をN_2，コイルの長さをlとすると，巻き密度は一次コイルで$n_1=\dfrac{N_1}{l_1}$、二次コイルで$n_2=\dfrac{N_2}{l_2}$となる。コイルの断面積をSとし、一次コイルにI_1の電流を流す。このとき、二次コイルのA、B端子間はつながっていないものとする。相互誘導が出題されるとき、このAB間がつながっていると、二次コイルに電流が流れコイル内の磁束が変化する。二次コイルのAB間がつながっていないということは一次コイルで発生する磁束がコイル内のすべての磁束である。

このとき、一次コイルの生じる磁束は自己誘導のときと同じで、

$\Phi=\mu n_1 S I_1=\dfrac{\mu N_1 S}{l_1}I_1$である。

よって、一次コイルに生じる誘導起電力（自己誘導）V_1は

$$V_1=-N_1\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu N_1{}^2 S}{l_1}\frac{dI_1}{dt}=-L_1\frac{dI_1}{dt}$$

である。この磁束がそのまま二次コイルに入るので、

$$V_2=-N_2\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu N_1 N_2 S}{l_1}\frac{dI_1}{dt}=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}$$

このときの$\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l_1}$を**相互インダクタンス**という。単位は自己インダクタンスと同じくH：ヘンリーである。

この場合，一次コイルと二次コイルの間の磁束は共通であるとし，磁束は外部に漏れないとしているが,実際は少し磁束が外部に漏れており,相互インダクタンスは$\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l_1}$より少し小さくなっている。その係数を$k$とおくと，実際の相互インダクタンスは

$$M = k\frac{\mu N_1 N_2 S}{l_1}$$

とあらわされる。このkを結合係数と呼んでいる。入試においては，$k=1$とされている。以降$k=1$として考えていく。

高校物理で扱う相互誘導は理想的な相互誘導であり，コイル内の磁場は一様であるとみなしている。これは，一次コイルと同じ位置に二次コイルを巻きつける形式となる。問題における図は別の位置に巻きつけておいても同じ位置に巻きつけていると考えるべきである。そうでないと，コイルの位置によって磁束が異なることになる。よって，コイルの長さも等しくしないと，コイル内の磁束が一様とならないので，今後はコイルの長さは同じで，

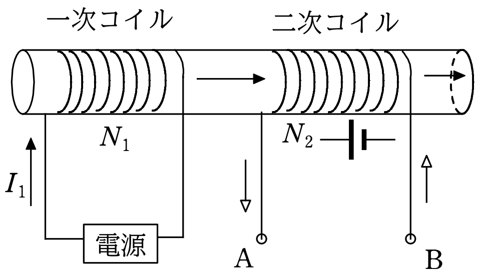
$$l = l_1 = l_2$$

とする。

ここで、一次コイルと二次コイルの誘導起電力の違いはそのまま巻き数のみである。よって、一次コイルと二次コイルの起電力の比は巻き数の比となる。

$$V_1 : V_2 = -L_1\frac{dI_1}{dt} : -M_{12}\frac{dI_1}{dt} = L_1 : M = \frac{\mu {N_1}^2 S}{l} : \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = N_1 : N_2$$

(2)　A、Bの電位について

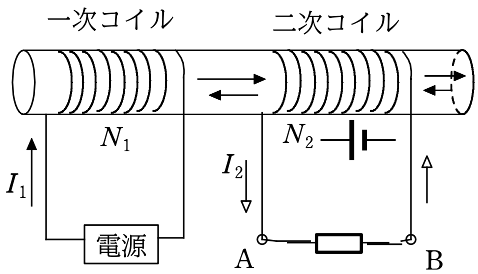


一次コイルの電流I_1が増加したとき磁束が右向きに増加する。二次コイル内に右向き磁束が増加するので左向きに磁束が発生するように電流が流れようとする。このとき、ABがつながっていればコイルにBからAに電流が流れるので、Bのほうの電位が高いように思えるのであるが、二次コイルが電池の役割をしているので、二次コイルに電池マークをつけて確認すると、Aの電位の方が高いことが分かる。

「電磁誘導は発電部分に電池マークをつける」

これは常に注意しておかなければならない。

(3)　AB間を接続した場合



いままでは、AB間をつながなかった。そのため、二次コイルに電流が流れないので、二次コイルに流れる電流が一次コイルに影響を与えることがなかったが、二次コイルに電流が流れた場合は、その影響が一次コイルに及ぶ。一次コイルの電流が変化するとその影響で二次コイルの電流がまた変化するのである。これは一見複雑であるが、簡単に考えることができる。

いま、二次コイルに流れる電流をI_2とすると、二次コイルが磁束を作るために二次コイルによる誘導起電力が一次コイル，二次コイルに生じる。

二次コイルの自己インダクタンスL_2は一次コイルと同様にして，$L_2=\dfrac{\mu {N_2}^2 S}{l}$である。

また，$L_1=\dfrac{\mu {N_1}^2 S}{l}$ ，$M_{12}=\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l}$なので， $M_{12}=\sqrt{L_1 L_2}$の関係があることが分かる。

一次コイルの電流をI_1，電圧をV_1，二次コイルの電流をI_2，電圧をV_2とすると，一次コイルの電圧は一次コイル･二次コイルの磁束が逆に生じるので，電流I_1における自己誘導と電流I_2における自己誘導の差となる。

$$V_1=-L_1\frac{dI_1}{dt}+M_{21}\frac{dI_2}{dt} \quad ・・・ ①$$

同じく二次コイルの電圧は一次コイルからの相互誘導によって生じた電流により二次コイルに自己誘導が生じるので，相互誘導と自己誘導の差となる。

$$V_2=-M_{12}\frac{dI_1}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt} \quad ・・・ ②$$

相互インダクタンスM_{21}は，M_{12}と逆になるので，$M_{21}=\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l}=\sqrt{L_1 L_2}=M_{12}$

一次コイルから二次コイルを誘導する場合と，二次コイルから一次コイルを誘導する場合は同じ相互インダクタンスとなる。

$$M=M_{21}=M_{12}=\sqrt{L_1 L_2}$$

とする。よって，①②は

$$V_1=-L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt} \quad ・・・ ①$$

$$V_2=-M\frac{dI_1}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt} \quad ・・・ ②$$

(4) 変圧器

$L_1=\dfrac{\mu {N_1}^2 S}{l}$，$L_2=\dfrac{\mu {N_2}^2 S}{l}$，$M=\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l}$を用いると

①は $V_1=-\dfrac{\mu {N_1}^2 S}{l}\dfrac{dI_1}{dt}+\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l}\dfrac{dI_2}{dt}=-\mu N_1 S\left(\dfrac{N_1}{l}\dfrac{dI_1}{dt}-\dfrac{N_2}{l}\dfrac{dI_2}{dt}\right)$

②は $V_2=-\dfrac{\mu N_1 N_2 S}{l}\dfrac{dI_1}{dt}+\dfrac{\mu {N_2}^2 S}{l}\dfrac{dI_2}{dt}=-\mu N_2 S\left(\dfrac{N_1}{l}\dfrac{dI_1}{dt}-\dfrac{N_2}{l}\dfrac{dI_2}{dt}\right)$

よって，$V_1:V_2=N_1:N_2$ ... ③

二次コイルに抵抗Rをつなぎ,一次コイルに $V_1=V_0\sin\omega t$の交流電圧を掛けたとき，

$V_2=RI_2$ となる。

$M=\sqrt{L_1 L_2}$とおくと，①②は

$$-L_1\frac{dI_1}{dt}+\sqrt{L_1 L_2}\frac{dI_2}{dt}=V_0\sin\omega t \quad ・・・ ①$$

$$-\sqrt{L_1 L_2}\frac{dI_1}{dt}+L_2\frac{dI_2}{dt}=RI_2 \quad ・・・ ②$$

①×$\sqrt{L_2}$−②×$\sqrt{L_1}$を計算すると，

$$\sqrt{L_1}V_0\sin\omega t-\sqrt{L_2}RI_2=0$$

$$I_2=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{V_0}{R}\sin\omega t$$

これを①に代入すると

$$-L_1\frac{dI_1}{dt}+\sqrt{L_1L_2}\cdot\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\frac{V_0}{R}\omega\cos\omega t=V_0\sin\omega t$$

$$\frac{dI_1}{dt}=\frac{L_2}{L_1}\frac{V_0}{R}\omega\cos\omega t-\frac{V_0}{L_1}\sin\omega t$$

積分すると

$$I_1=\frac{L_2}{L_1}\frac{V_0}{R}\sin\omega t+\frac{V_0}{\omega L_1}\cos\omega t+\text{積分定数}$$

積分定数は直流を意味する。

一次コイルの消費電力P_1は

$$P_1=V_1I_1=V_0\sin\omega t\cdot\left(\frac{L_2}{L_1}\frac{V_0}{R}\sin\omega t+\frac{V_0}{\omega L_1}\cos\omega t+\text{積分定数}\right)$$

$$=\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}\sin^2\omega t+\frac{{V_0}^2}{\omega L_1}\sin\omega t\cos\omega t+\text{積分定数}\cdot V_0\sin\omega t$$

$$=\frac{1}{2}\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}(1-\cos 2\omega t)+\frac{1}{2}\frac{{V_0}^2}{\omega L_1}\sin 2\omega t+\text{積分定数}\cdot V_0\sin\omega t$$

平均すると，$\sin 2\omega t$，$\cos 2\omega t$，$\sin\omega t$は0となるので，

$$\overline{P_1}=\frac{1}{2}\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}$$

一方　抵抗の消費電力P_2は

$$P_2=R{I_2}^2=R\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R^2}\sin^2\omega t$$

$$=\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}\sin^2\omega t=\frac{1}{2}\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}(1-\cos 2\omega t)$$

平均すると，$\cos 2\omega t$は0となるので，

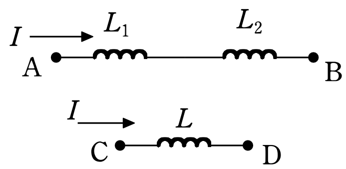
$$\overline{P_2}=\frac{1}{2}\frac{L_2}{L_1}\frac{{V_0}^2}{R}$$

この計算により，一次コイルと二次コイルの消費電力が等しくなっていることがわかる。抵抗で消費された電力が一次コイルから渡されたものであることを意味している。

変圧器においては，電気エネルギーをそのまま伝えることができるのである。

６． コイルの合成

⑴　直列接続



自己インダクタンスL_1のコイルとL_2のコイルを直列に接続したとき，同等の能力を持つ一個のコイルの自己インダクタンスを求める。

同等の能力を持つということは，同じ電流を流した時に同じ誘導起電力が生じるとよいことになる。

AB間の誘導起電力は　$V_{AB}=-L_1\dfrac{dI}{dt}-L_2\dfrac{dI}{dt}=-(L_1+L_2)\dfrac{dI}{dt}$

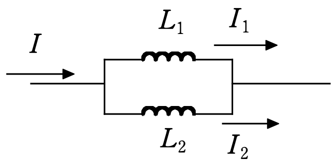
CD間の誘導起電力は　$V_{CD}=-L\dfrac{dI}{dt}$

両者を比較することにより

$L=L_1+L_2$

となる。

⑵　並列接続



並列の場合は両者の電圧が等しいので回路の電圧をVとすると，

$$V=-L_1\frac{dI_1}{dt}=-L_2\frac{dI_2}{dt}$$

$$\frac{dI_1}{dt}=-\frac{V}{L_1}\quad \frac{dI_2}{dt}=-\frac{V}{L_2}\qquad ・・・①$$

一つのコイルと考えた時の自己インダクタンスをLとすると，

$$V=-L\frac{dI}{dt}\qquad \frac{dI}{dt}=-\frac{V}{L}\qquad ・・・②$$

$I=I_1+I_2$なので，　$\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{dI_1}{dt}+\dfrac{dI_2}{dt}$

①②より

$$-\frac{V}{L}=-\frac{V}{L_1}-\frac{V}{L_2}$$

よって，

$$\frac{1}{L}=\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}$$