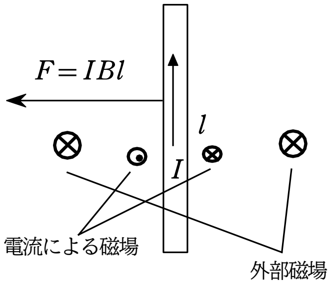
ローレンツ力

１．ローレンツ力

(1)　電流が磁場から受ける力は導線の何にはたらいているのか

　磁束密度Bの磁場内で長さlの導線に電流Iを流すと、$F=IBl$の力がはたらく。この力は導線のどの部分にはたらいているのであろうか?



　電流が流れていないときにはこの力ははたらいていないのであるから、電流が流れているときと流れていないときで状態が異なるものにはたらいていることになる。よって、この力は原子核にははたらいていない。電流が流れているときと流れていないときで状態が異なっているものといえば、それは電子である。電流が流れているときには電子は動いており、電流が流れていないときは電子は静止している。このことより、電流が磁場から受けるIBlの力は、動いている電子にはたらいているといえる。

(2)　電子1個にはたらく力

　それでは、電子1個にどれだけの力がはたらいているのであろうか？その力は、電流にはたらいている力を全自由電子数で割れば求められる。

　導線1m^{3}中にn個の自由電子が存在する（電子密度n）とすると、長さl、断面積Sの導線中に、nlS個の自由電子数があることになる。これらすべての自由電子が磁場から受ける力がIBlであるから、電子1個当たりに作用する力fは$f=\dfrac{IBl}{nSl}$となる。ここで、電流の項で導いた

$$I=envS \qquad (e=\text{電子1個の電気量、}v=\text{自由電子の電場による移動速度})$$

を用いて、

$$f=\frac{IBl}{nSl}=\frac{envS\cdot Bl}{nSl}=evB$$

　これにより、電子1個当たりにevBの力がはたらいていることになる。この力をローレンツ力という。

　eは電子1個の電気量であるから、電荷qを持った荷電粒子にはたらく力は

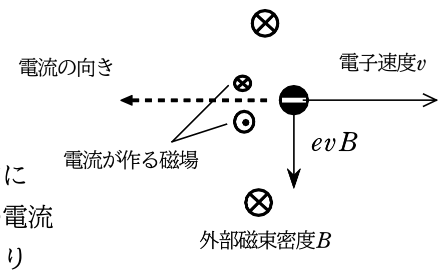
$$f=qvB$$

となる。

２． 一様な磁場中における荷電粒子（電子）の動き

⑴ 一様な磁場の中に垂直に進入したときの電子の動き

紙面向こう向きに一様な磁束（磁束密度B）がある。この磁束に垂直に電子が速度vで進入した。電子は負電荷を持っており、電流は正電荷の流れであるから、右図のように電子が右向きに動いているのと、電流が左方向に流れているのは同じことである。よって、その電流により磁場が発生し、その磁場と外部磁場により電子は力を受ける。その力は電流が作る磁場と、外部磁場の方向が電子の下側で逆向きになっているので、下向きであることになる。



よって、電子にはローレンツ力evBが下向きにはたらくことになる。電子の速さが速くなるには電子の進行方向に力が作用しなければならず、遅くなるには、電子の進行方向逆向きに力が作用しなければならない。ローレンツ力は電子速度と常に直角方向にはたらいているので、電子の進行方向には力がはたらいていない。そのために電子の速さは変わらないのである。

「ローレンツ力は電子速度と常に直角方向に作用する」

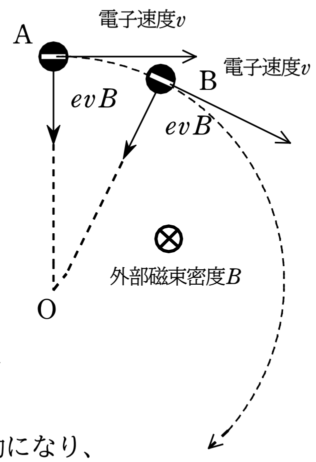
「ローレンツ力は電子の速さを変えることはない。」

電子の進行方向直角に常にローレンツ力がはたらいているので、常にローレンツ力と直角方向に動くことになり、ローレンツ力は電子に対して仕事はしない。

「ローレンツ力は荷電粒子に対して仕事をしない。」

よって、電子の速度は方向が変わるのみで速さは変わらないことになり、速さ一定の運動をする。

次にこの運動状況について分析してみよう。いまA点にある電子はローレンツ力がはたらいて進行方向が変化しB点に移動したとする。B点に移動したときも進行方向に対して直角方向にローレンツ力がはたらいている。そこで、A点のローレンツ力とB点のローレンツ力の方向を延長し、その交点をOとする。ここで、ローレンツ力は常に進行方向と直角であるので、仕事をしないため、AO＝BOといえる。（AOとBOが違えばローレンツ力が仕事をしたことになる）



この結果電子の運動は点Oからの距離が常に一定の運動になり、あわせて速さが一定であるので、等速円運動であることが分かる。

「磁束に直角に進入した荷電粒子は等速円運動をする。」

荷電粒子は等速円運動をするのであれば、向心加速度が存在する。向心加速度は回転半径をRとすると、$\dfrac{v^2}{R}$である。電子の質量をmとすると、ローレンツ力による運動方程式

は、

$$m\frac{v^2}{R}=evB$$

これを解くと、

$$R=\frac{mv}{eB}$$

これがローレンツ力による等速円運動の回転半径である。

等速円運動では角速度をωとすると、$v=R\omega$の関係が成り立つ。この式を用いると、運動方程式は　$m\omega=eB$　と変わる。すなわち、

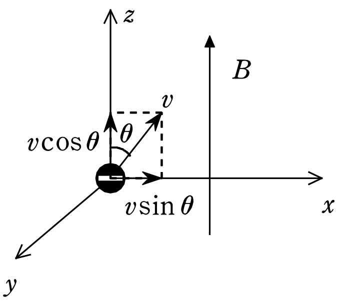
$$\omega=\frac{eB}{m}\quad\text{または、}\quad\text{周期}T=\frac{2\pi m}{eB}\text{、回転数}f=\frac{eB}{2\pi m}$$

である。この式の右辺は磁束密度Bのみ変化させせることができる。そして、この式は回転半径Rを持たない。すなわち、この式の意味するところは、

「磁場中の荷電粒子の角速度（周期、回転数を含む）は磁束密度のみによって決定する。」

ということである。

⑵　磁場に斜めに荷電粒子（電子）が進入した場合



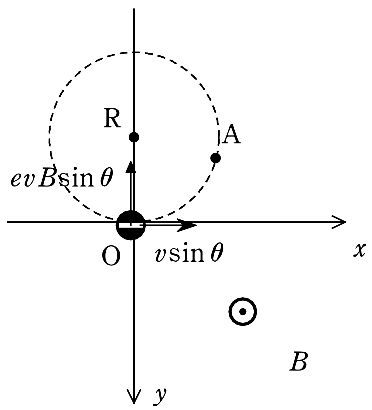
磁力線に対し直角方向に侵入した電子が等速円運動をすることが分かったが、斜めに入った場合はどうであろうか？この場合は、電子の速度ベクトルを、磁力線に沿う方向と磁力線と直角方向成分に分解して考えればよい。

磁束密度がz軸上向きに存在しているxyz空間において、電子が原点をxz平面内でz軸と角度θ、速さvで進入した場合の運動状況を分析してみよう。

電子の速度成分は

$$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)=(v\sin\theta,0,v\cos\theta)$$

である。



まず、この電子の運動をz軸正方向から負方向を見た図で考えてみよう。この場合の速度はx方向に$v\sin\theta$であるので、この電子は回転半径

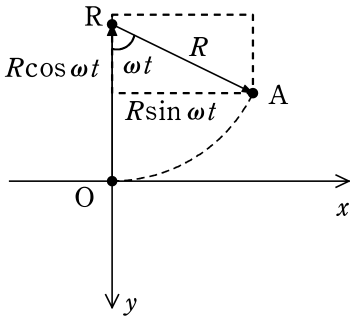
$$R=\frac{mv\sin\theta}{eB}$$

の等速円運動をしていることになる。右図のようにその円運動の中心は

$$\left(0,-\frac{mv\sin\theta}{eB}\right)$$

である。そして、角速度は$\omega=\dfrac{eB}{m}$である。

t秒後のAの座標は右下の図により

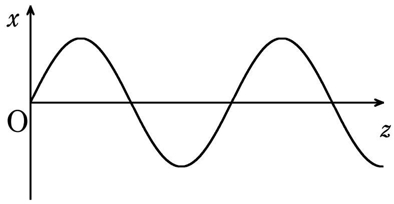


$(R\sin\omega t, R-R\cos\omega t)$
であることがわかる。

また、z方向は磁場と同じ方向の速度であるから、z方向は磁場からまったく力を受けないので、等速運動になる。よってt秒後のz座標は$v\cos\theta\cdot t$となる。
よって、この電子のt秒後の位置座標は
$(R\sin\omega t, R-R\cos\omega t, v\cos\theta\cdot t)$

次にy軸正方向から負方向を見た運動はどのようなものであろうか。この座標は、

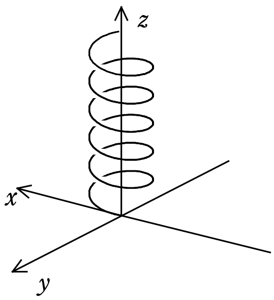
$x=R\sin\omega t$、$z=v\cos\theta\cdot t$



この2式よりtを消去すると、

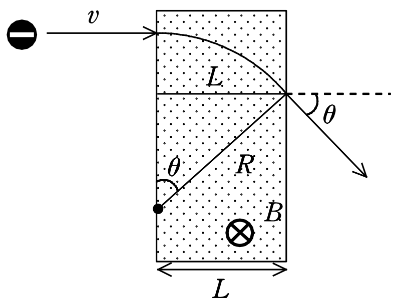
$$x=R\sin\frac{\omega}{v\cos\theta}z$$

この式は正弦波である。
つまり、y方向から見た運動はサインカーブとなるのである。また、z方向から見た運動は等速円運動であるから、この電子の実際の運動は右図のように螺旋運動になる。



３． 電子速度の磁場による方向変化

右図のような磁束密度B、幅Lの領域に磁場に垂直に電子が速さvで進入したとき、磁場によって電子の進行方向が変化する。その角度を求めてみよう。



運動方程式により

$$m\frac{v^2}{R}=evB$$

これより、$R=\dfrac{mv}{eB}$となる。

また、図より、

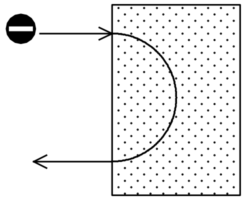
$$\sin\theta=\frac{L}{R}=\frac{eBL}{mv}$$

この式は

$$v=\frac{eBL}{m\sin\theta}$$

ここで、$\theta=90°$の時vが最小値となる。vは

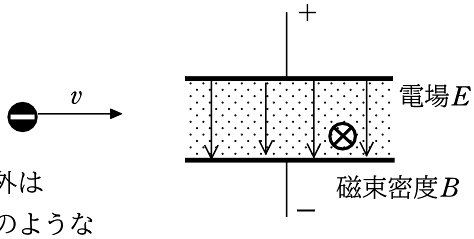
$$v > \frac{eBL}{m}$$



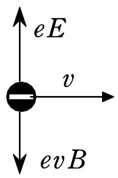
の速度がないとこの領域を電子は通過できない。
この場合は電子はUターンする。

４． 速度選別器

2枚の金属板を平行に設置し、金属板内に磁束密度Bの磁場を紙面向こう向きにかける。そして、上の金属板を正に下の金属板を負に帯電させ、下向きに電場Eをかけた。この金属板間に電子（荷電粒子）を入射させたとき、ある特定の速度を持った電子以外はこの金属板間を通過できない。このためにこのような装置を速度選別器という。



この速度選別器に水平に入射した電子は金属板間の空間で右図のような力を受ける。このとき、$eE > evB$のときは電子は上向きに加速し、上の金属板に衝突する。$eE < evB$のときは、下向きに加速し、下の金属板に衝突する。



電子に作用する力

$eE = evB$のときは互いに逆向き同じ大きさの力であるから、互いに打ち消しあい、電子は等速直線運動をするので、この条件を満たすときのみこの金属板を電子が通過できる。

この金属板を通過できる電子の速度を求めてみよう。

その条件は

$$eE = evB$$

であるから、その速度は

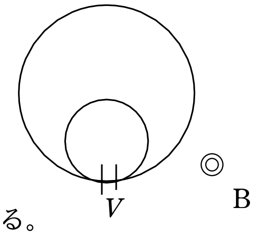
$$v = \frac{E}{B}$$

である。

これは、電子が直進する条件でもある。

５． サイクロトロン

質量m、電荷$-e$の電子を手前向きの磁束密度Bの一様磁場中で電圧Vで加速させた。加速した電子は等速円運動して再び加速装置にやってきて、再び加速される。加速装置の大きさは電子の回転半径に比べて十分に小さいものとする。



加速装置の正極に静止状態の電子を置くと、電圧Vで加速される。その速度をvとすると、

$\frac{1}{2}mv^2=eV$　　よって速度は　$v=\sqrt{\frac{2eV}{m}}$

加速後の電子の運動方程式は

$m\frac{v^2}{R}=evB$　より、$R=\frac{mv}{eB}=\frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2eV}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{e}}$

出発点に戻ってくるまでの時間は

$$T=\frac{2\pi R}{v}=\frac{2\pi\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mV}{e}}}{\sqrt{\frac{2eV}{m}}}=\frac{2\pi m}{eB}$$

これは磁束密度のみに関係する定数である。この場合磁束密度は一定なので、周期は一定といえる。

この円運動は等速円運動なので、時間$\frac{2\pi m}{eB}$後、出発点に戻ってくる。そこで再び加速されるも、その後も等速円運動になり、周期も等しい。n解加速された後の速度v_n、回転半径R_nを求めてみよう。

n回加速後の運動エネルギーは

$\frac{1}{2}m{v_n}^2=neV$　　　よって、　$v_n=\sqrt{\frac{2neV}{m}}$

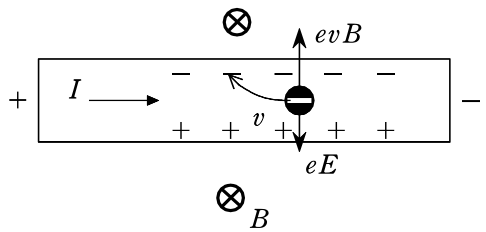
回転半径R_nは、運動方程式より

$m\frac{{v_n}^2}{R}=ev_nB$　これより、　$R_n=\frac{mv_n}{eB}=\frac{m}{eB}\sqrt{\frac{2neV}{m}}=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2nmV}{e}}$

このように同じ加速装置で加速する装置をサイクロトロンと呼んでいる。
（この場合は電子が一周するごとに加速しているが正確には半周ごとに加速している。）

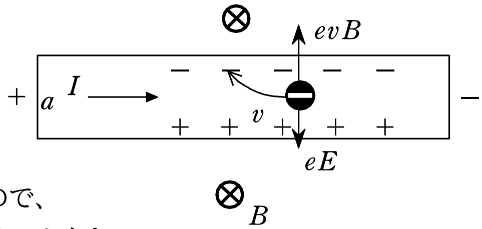
６．ホール効果

(1)　ホール効果とは



右図のように磁場中に導線を置き、その導線に電流を流した場合、電子は負極から正極のほうに移動し磁場の影響を受けてローレンツ力がはたらく。右図の場合は電流が右向きに流れているので、電子は左向きに移動する。
そのときに外部磁場によりローレンツ力を上向きに受け電子は上向きに移動する。その結果、電子が導線の上部に集中し、その反対側が正極となる。このように、磁場中で電流を流した場合に銅線の側面に電位差が生じるのである。このような現象を**ホール効果**という。

(2)　ホール効果の起電力



導線の断面が一辺aの正方形であるとして
ホール効果による電位差を求めてみよう。
電流を流し始めてから最初の電子は上向きに移動するが、充分に流れると、電子が上に偏り、電場が上向きに発生するので、最終的に電子は直進するようになる。つまり、上向きのローレンツ力evBと発生した電場によるクーロン力eEが等しくなる。よって、

$$evB=eE$$

ここで、電流は$I=envS$であるから、$v=\dfrac{I}{enS}$を代入して、

$$\frac{BI}{nS}=eE$$

よって、$E=\dfrac{BI}{enS}$である。ここで、導線の厚さがaであるから、電位差Vは

$$V=Ea=\frac{BIa}{enS}$$

ここで、断面は一辺aの正方形であるから、$S=a^2$である。よって、

$$V=\frac{BI}{ena}\quad\cdots①$$

これがホール効果によって生じる電位差である。

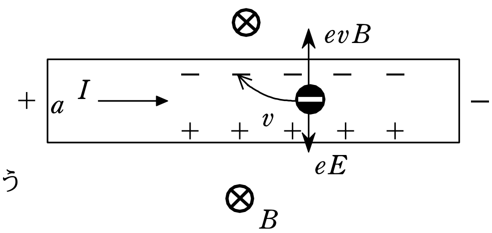
上の式のうちV,I,aは簡単に測定することができ、eは電子の電気量であるから前もって分かっている、また、nは$1\mathrm{m}^3$中の自由電子数であるから、材質によって前もってわかっている。銅の場合$n=8.4\times10^{28}$個$/\mathrm{m}^3$である。そのために、この式は磁束密度Bの測定に良く用いられる。

(3)　半導体のnの測定

銅の導線を使うことによってその場の磁束密度を測定する。それによってその磁束密度を使って半導体の電子密度nを測定することができる。

電子密度nは、半導体の場合導体に比べてはるかに小さくなる。そのために、①式によりホール効果による電圧が高くなるのである。

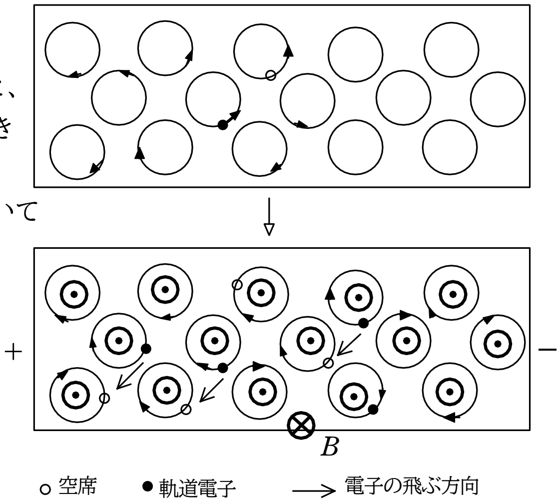
N型半導体の場合は自由電子が数は少ないながら動いているので、①の式がそのまま適用できる。しかし、P型半導体はそうはいかない。



もし、電子が左向きに動いているとしたら、通常の導体と同じく、右図の場合、上側が負極になるのであるが、実際にP型半導体でホール効果を測定すると、上側が＋になってN型半導体とは逆になるのである。これはどうしてであろうか？

P型半導体は自由電子が動くのではなく、軌道電子がある電子軌道から別の電子軌道に

飛び移ることにより、電流が流れるのである。この状態を図で示すと下図のようになる。



各原子の周りを回っている電子に統一されたものはなく、ばらばらに回っている。このP型半導体に磁場をかけると、原子自体が磁化され、外部磁場と逆向きの磁場ができるように電子が回転する。

紙面向こう向きに外部磁場がはたらいている場合、各原子が作る磁場は紙面手前向きになるように電子が回転するようになる。このとき、導線の左側に＋、右側に－極をつなぐと、軌道電子は左側にある原子の空席を目指して飛び移ろうとするが、飛び移る電子の速度と飛び移る先の空席の速度が一致しないと飛び移れない。そのため、電子が飛び移ることができるのは図のように左下にある原子の空席に対してのみである。その結果、軌道電子は導線の下側に集まり下側が負極に上側が正極になり、N型半導体とは逆であることになる。