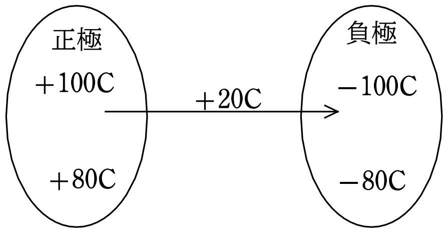
# 電気抵抗

## １． 電流

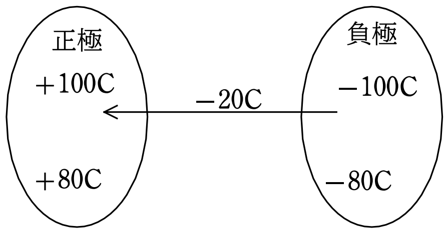
### ⑴ 電流と電子の流れ

電流とは**導線のある断面を1秒間に通過する電気量**を示す。1秒間に$I$[C]の電気量がある断面を通過したときの電流を$I$[A]という。電流は＋電荷の流れと定義されているが、実際はマイナス電気である電子の流れである。

この関係について考えてみよう。




右図のように正極に＋100C、負極に－100Cあり、電流として正極から負極に＋20C流れたとしよう。その結果、正極は＋80C、負極は－80Cとなる。

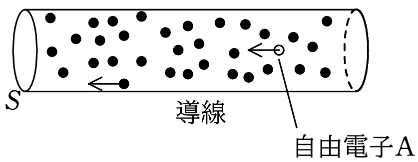



逆に負極から正極のほうに－20C流れたとすると、負極は－100Cから－20Cが減るから、－80Cとなり、正極は＋100Cに－20Cが追加されるので、＋80Cとなる。

この結果から分かるように正電荷が＋極から－極に流れるということと、負電荷が－極から＋極へ流れるということは結果論において同じことである。

実際は電荷は負極から正極へ負電荷の電子が移動しているが、正極から負極に正電荷が移動しているとしても結論において矛盾はないということになる。

### ⑵ 電流




1個$e$[C]の電荷を持つ電子が一定の速さ$v$[m/s]で一様に導線の中を右から左に流れている場合を考える。

このとき、断面S（断面積$S$[$m^2$]）を1秒間に通過する電子数がわかれば、1秒間に通過する電気量すなわち電流が求められる。この方法を用いて電流$I$を求めてみよう。

まず、導線中の自由電子数であるが、たとえば銅製の導線であれば$Cu^+$イオンになるため、銅原子1個当たり1個の自由電子があることになる。そこで、導体1$m^3$中の自由電子数が$n$個ある材質でできた導線であるとしよう。このすべての自由電子は一定の速さ$v$[m]で一斉に左向きに動いているとする。

導線中のある自由電子Aに注目してみる。通過電子数の測定開始後、この自由電子がちょうど1秒後に断面Sを通過したとすると、この自由電子Aと断面Sの間にあった自由電子はすべて自由電子Aが断面を通過する前にこの断面を通過しており、通過自由電子数としてカウントされているはずである。よって、カウントされた自由電子数は断面Sと自由電子Aとの間にあった自由電子数である。自由電子Aは一定の速さ$v$[m/s]でちょうど1秒後に断面Sを通過したのであるから、この断面と自由電子Aとの距離は最初$v$[m]あったことになる。そのため、カウントした自由電子がある領域の体積は$vS$[$m^3$]となる。この領域内にある自由電子数は$nvS$個である。自由電子1個あたりの電気量が$e$[C]であるから、断面$S$

を1秒間に通過した電気量は$envS$[C]となる。これは電流に他ならない。よって、

$$I=envS$$

が成立する。

(3)　自由電子密度の計算

原子量$Z$、密度$d$[kg/m³]、イオンの価数$a$、とした時の自由電子密度$n$を求めてみよう。

$d$[kg/m³]=1000$d$[g/m³]

物質量は　$1000d[\mathrm{g/m^3}]=\dfrac{1000d}{Z}[\mathrm{mol/m^3}]$

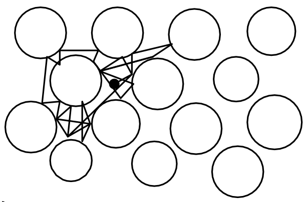
自由電子の物質量は　$\dfrac{1000da}{Z}[\mathrm{mol/m^3}]$

アボガドロ数を$N_0$とすると、自由電子密度は$n=\dfrac{1000da}{Z}N_0$[個/m³]

銅線の自由電子密度は、銅の原子量64、密度8900kg/m³、イオンの価数1

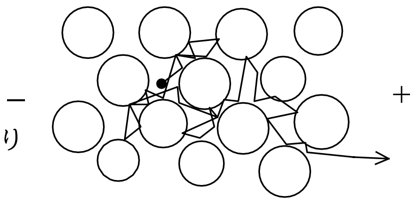
$$n=\frac{1000da}{Z}N_0=\frac{1000\times 8900\times 1}{64}\times 6.02\times 10^{23}=8.4\times 10^{28}[個/\mathrm{m^3}]$$

(4)　導体内の自由電子の動き



導体内の自由電子は、原子の間を衝突を繰り返しながら移動している。その速さは約100km/sという恐ろしいほどの速さである。しかし、導体内では原子が密集しているために同じところを不規則に動くことになり、あまり遠くまでは動かない。つまり、各自由電子の平均の位置はいつまでたっても変わらないのである。その様子を描いたのが上の図である。黒点の自由電子はその周辺から遠くへは動けないのである。

この状態で導体に電場がかかったときは、自由電子は衝突を繰り返しながらも少しずつ正極の方へ移動することになる。この場合は今まで動かなかった自由電子の平均の位置がゆっくりと正極のほうへ動いていくのである。この平均の位置の速さは大体0.1mm/sというかなり遅い速さである。これが、電流の項(2)で使われた$v$に相当する。



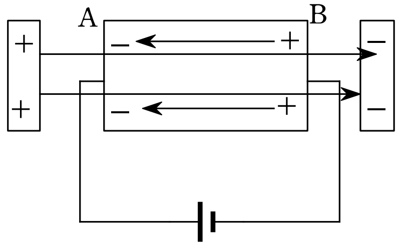

＜例＞　断面積1mm²の銅線に1Aの電流を流した時の自由電子平均移動速度はいくらか。電子1個の電気量を$1.6\times10^{-19}$C、銅の自由電子密度を$8.4\times10^{28}$[個/m³]とする。

＜解説＞

$I=envS$より　$v=\dfrac{I}{enS}=\dfrac{1}{1.6\times10^{-19}\times8.4\times10^{28}\times1\times10^{-6}}=7.4\times10^{-5}\mathrm{m/s}$

$=0.074\mathrm{mm/s}$

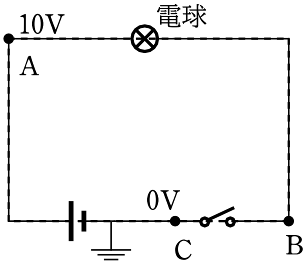
(5)　金属は静電誘導を起こし金属内に電場はないはずなのになぜ電流が流れるのか




　金属のA端を電池の正極、B端を電池の負極に繋ぐと、AB間に電圧が生じて電気力線が伝わり、電子の移動がB→Aの方向に起こる。

　このままであればA端が負極、B端が正極の静電誘導が起こっており、電場が打ち消されて電子の移動は止まる。ところが、A端にたまった電子は電池の正極に吸い取られ、B端の方に移動させるので金属に電荷がたまらず、常に電気力線がA→Bの方向に走っており、電流が連続して流れるのである。

(6)　電子の移動速度が遅いのになぜスイッチを入れると同時に電球がつくのか



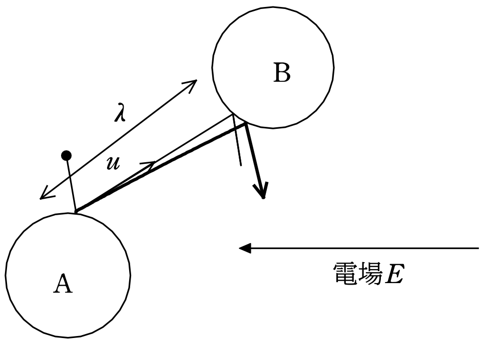

　電球に10Vの電池とスイッチをつなぎ、電池の負極をアースした。このとき、点Cはアースされているので電位0V、点Aは電池の正極なので10Vである。

　スイッチが切れているとき、電球に電流が流れていないのでAとBは同電位で10Vとなる。BC間に電圧10Vがかかっているが、BC間が切れているために電流が流れない状態にある。

　スイッチを入れると、Bの電位が0Vとなり、AB間の電圧が10Vになり、電場が生じる（電気力線が伝わる）。その結果電流が流れだすのである。流れる自由電子はもともと電球内に存在していたが、電場がないためその電子の移動が起こらなかったのである。スイッチを入れた瞬間電気力線が伝わるので、電子が一斉に移動を始めて電球が光ることになる。この電気力線の伝わる速さは光の速度なので、スイッチを入れた瞬間に電球が光るのである。

## ２．オームの法則

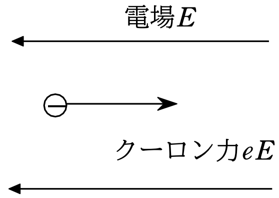
### (1)　自由電子の速度の計算




　今、ある原子Aに衝突した自由電子が次に原子Bに衝突する場合を考えてみよう。もし、電場が作用していないなら、この電子はその間を直線上に移動する。右図の細線である。そのときの速さを$u$とする。電子の衝突の平均距離を$\lambda$とすると、Aに衝突してからBに衝突するまでの時間$T$は、$T=\dfrac{\lambda}{u}$で表わされる。

　この導体内に電場が左向きに作用した場合は、自由電子の軌道がわずかに右にずれる。その軌道が太線である。自由電子は非常に速いためにこのずれはごくわずかである。この

ずれが衝突のたびに積み重なって自由電子の平均の位置が少しずつ右に移動することになる。このときは原子の間を移動中に右向きに力を受けて右向きに自由電子が加速される。その力の大きさは電子の電気量を$e$とすると$F=qE$より、$F=eE$となる。



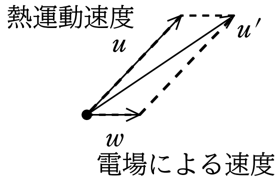

その加速度を$a$とすると、運動方程式より

$$ma=eE$$

が成立する。これより

$$a=\frac{eE}{m}$$

となる。




原子Aに衝突後の自由電子の速度は熱運動速度$u$に電場によって加速された速度$w$が加わったものになる。原子Aに衝突してから、$t$秒後の電場によって加速された速度は$v=at$より（初速度は$u$であるが、これは熱運動速度であるから、電場による初速度は0と考えてよい。詳細な証明は「複雑な公式誘導」を参照のこと）

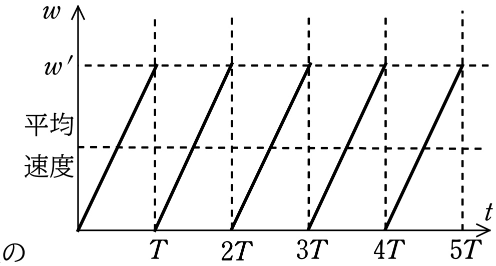
$$w=at=\frac{eE}{m}t$$

で、原子Bに衝突する瞬間の電場による速度$w'$は$t=T$と置いて

$$w'=\frac{eE\lambda}{mu}$$

である。この速度$w'$と熱運動速度$u$との合成された速度$u'$で原子Bに衝突する。衝突後の自由電子の速度は$u'$であるが、これは原子Aに衝突した瞬間よりも速くなっている。この速度は熱運動速度であることに注目してほしい。それまでの電場による速度$w'$は熱運動速度になっているのである。その証拠に原子Bにぶつかった瞬間に電場を0にすると、その後のこの自由電子の平均の位置は動かない。平均の位置は電場が掛かっているときだけ移動するのである。熱運動速度が大きくなったということは、導体の温度が上昇したということを意味している。

このようにして自由電子は原子A、B、C…と次々に衝突を繰り返していくのである。このときのこの自由電子の電場による速度の時間変化をグラフにしてみると下のグラフのようになる。




原子に衝突するたびに電場による速度は熱運動速度に変わるために、衝突のたびに0となる。衝突時間間隔$T$は原子間隔によるので一定ではないが、ほぼ一定と考えてよい。そうすると、右のようになる。

この速度の平均値が自由電子の平均の位置の移動速度である。すなわち(1)における$v$である。

$$v=\overline{w}=\frac{1}{2}w'=\frac{1}{2}\frac{eE\lambda}{mu}$$

となる。

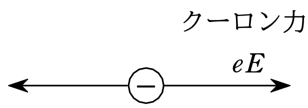
この平均速度はグラフを見てわかるように一定である。よって、電子の移動速度$v$は、電場の強さ$E$が変わらない限りほぼ一定を保つ。

⑸　自由電子にかかる抵抗力

$I=envS$において、$e,n,S$は定数となるので、$I$と$v$は比例関係となる。直流は電流が一定であるので、電子の移動速度$v$が一定となる。速度が一定であるということは、力がつりあっていなければならない。

**直流⇔$I=$一定⇔$v=$一定⇔力のつり合い**

が成立する。自由電子の進行方向にクーロン力$eE$が作用しているのであるから、その逆向きにも同じ大きさの力がはたらいていなければならない。その力を求めてみよう。




⑷における結論　$v=\dfrac{1}{2}\dfrac{eE\lambda}{mu}$　の右辺に$eE$が存在するので、右辺にこの$eE$だけ残すような変形をすると、

$$\frac{2mu}{\lambda}v=eE$$

となる。この式の右辺が力であるから左辺も力であり、しかも$eE$とつりあい関係の力である。これが、クーロン力$eE$と逆にかかっている力と考えられる。この力が電子が原子から受ける抵抗力である。ここで、

$$\frac{2mu}{\lambda}=k$$

とおくと、この抵抗力$f$は

$$f=kv$$

とおける。電子の移動速度に比例する力の大きさである。

ここで、$k$の大きさは熱運動速度$u$に比例している。これは比例定数$k$が温度によって変化する値であることを意味している。また、平均原子間隔$\lambda$を含むことから材質によっても変化する値である。

この抵抗力は、原子との衝突の瞬間に大きな力が作用するが、自由電子が原子間を移動しているときにはまったくかからない。つまり、この力も平均の力である。

⑹　オームの法則

ここまでにあげた2式

$I=envS$　と$kv=eE$

から、オームの法則を導き出してみよう。

導線の長さを$l$とし、導線両端にかかる電圧を$V$とすると、$V=Ed$より、$V=El$が成立する。よって、

$kv = eE = \dfrac{eV}{l}$　　これは、　　$v = \dfrac{eV}{kl}$

これを$I = envS$に代入して、

$I = en \cdot \dfrac{eV}{kl} \cdot S$　　　これを整理すると、

$V = \dfrac{k}{e^2 n} \cdot \dfrac{l}{S} \cdot I$　　　　となる。

ここで、　$\dfrac{k}{e^2 n} = \rho$、$R = \rho \dfrac{l}{S}$とおくと、

$V = RI$が導かれる。　これがオームの法則である。

このときの$\rho$を抵抗率、$R$を抵抗という。$k$が温度と材質によって変化するので、$\rho$も温度と材質によって異なる値をとる。

(7)　温度と抵抗率の関係

抵抗率$\rho = \dfrac{k}{e^2 n}$において、$k = \dfrac{2mu}{\lambda}$なので、$\rho = \dfrac{2mu}{e^2 n \lambda}$

熱運動速度$u$は温度が高いほど大きくなる。熱理論により、温度は分子1個当たりの運動エネルギーを意味しており、これは自由電子にも適用できる。$K$をボルツマン定数として、

$$\frac{1}{2} m u^2 = \frac{3}{2} KT$$

が成立している。　（気体分子運動参照）

$$u = \sqrt{\frac{3KT}{m}}$$

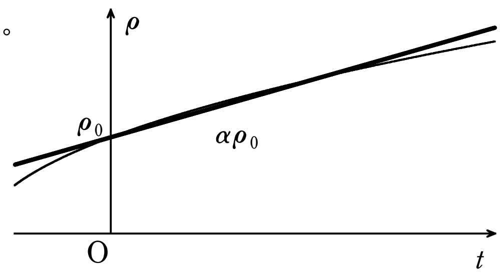
電子質量$m = 9.1 \times 10^{-31}$kg、$K = 1.38 \times 10^{-23}$J/Kを代入すると、

$$u = 6.7\sqrt{T}[\mathrm{km/s}]$$

となり、常温300Kでは、116km/sとなる。温度が高くなればなるほど熱運動速度は大きくなる。そのために抵抗率も温度が高くなればなるほど大きくなる。基本的に絶対温度の平方根に比例するのではあるが、温度が上がると原子配置が変わることがあったり、自由電子数が変化する物質もあるので必ずしも絶対温度の平方根に比例するわけではない。

ある物質の抵抗率$\rho$を摂氏温度$t$ごとに測定したのが右のグラフである。正確には一次関数からずれているのであるが、ある温度範囲において一次関数で近似できる。

0℃の時の抵抗率を$\rho_0$傾きを$\alpha\rho_0$とすると、




$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$$

と表すことができる。この時の$\alpha$を抵抗の温度係数という。

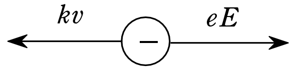
両辺に$\dfrac{l}{S}$を掛けると、$\rho\dfrac{l}{S}=\rho_0\dfrac{l}{S}(1+\alpha t)$となる。抵抗を$R$とすると、

$$R=R_0(1+\alpha t)$$

抵抗率の式はそのまま抵抗でも成り立つ。

３． 抵抗による発熱量

ここまでの論により、導線中の電子にはクーロン力$eE$と原子から抵抗力$kv$を受けることがわかった。そして、



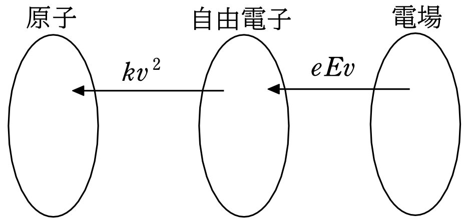

$$eE=kv$$

の関係が成り立つこともわかった。それでは、この式を用いて、導線の1秒間の発熱量を計算してみよう。自由電子の速度が$v$であるため、自由電子が1秒間に動く距離は$v$である。

電場はクーロン力$eE$で電子に対して仕事をする、その仕事量は1秒間当たり

$$W=Fs=eEv$$

となる。すなわち、電場から電子にエネルギー$eEv$が1秒間当たり流れ込んでいるということになる。




また、原子が電子に対して抵抗力$kv$を与えているため、原子が電子に対してした仕事は1秒当たり

$$W'=Fs=-kv^2$$

である。力の向きと電子の動く向きが逆なので、この仕事は負である。この場合エネルギーは自由電子から原子に流れていることになる。

$$kv=eE$$

より、

$$kv^2=eEv$$

が成り立つので、結局、原子は電場から$eEv$のエネルギーをもらったことになる。原子は自由電子と衝突することにより、原子の振動エネルギーとしてこれを受け取るのである。原子の振動エネルギーとは熱エネルギーのことである。よって、原子は自由電子1個当たり毎秒$eEv$の熱エネルギーを受け取っていることになる。

全体の発熱量は導線中の自由電子数がわかれば求められる。導線の体積は断面積$S$と導線の長さ$l$の積で求められ$lS$である。また、1m$^3$中の自由電子数は$n$個であるから、導線中の自由電子数は$nlS$個となる。よって、導線全体の発熱量$P$は自由電子1個あたりの発熱量に導線中の自由電子数をかければよいので、

$$P=eEv\cdot nlS$$

となる。文字の順番を入れ替えると、

$$P=El\cdot envS$$

ここで、$El$は公式$V=Ed$より、電圧$V$を意味することがわかり、$envS$は公式$I=envS$より、電流$I$を意味することがわかる。よって、

$P=VI$

となる。ここで、$V=RI$を用いて変換すると、

$$P=IV=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

となる。この電流による1秒間あたりの発熱量を**電力**という。電力は仕事率であるので単位Wを用いる。

$t$秒間の発熱量$Q$は電力$P$を用いて、

$Q=Pt$

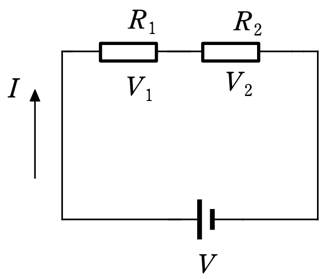
となる。この発熱量を**電力量**という。

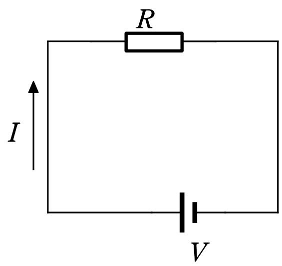
４． 抵抗の合成

(1) 直列配線

抵抗もコンデンサー同様に1個の抵抗で置き換えることができる。

考え方もコンデンサーと同様に同じ能力を持つ1個の抵抗と置き換えるのである。




抵抗の能力とは電流の制御である。しかし、高い電圧をかけると、より多くの電流が流れるので、同じ電圧にしたときに同じ電流が流れるような1個の抵抗で置き換えることとなる。

**「抵抗の合成とは同じ電圧で同じ電流が流れる1個の抵抗で置き換えること」**

これを利用して、直列配線の場合の合成抵抗を計算してみよう。二つの抵抗にかかる電圧をそれぞれ$V_1$、$V_2$とすると、

$V=V_1+V_2$

が成立する。直列の場合はどちらの抵抗にも同じ電流が流れるので、

$V_1=R_1I$ 、 $V_2=R_2I$ 、 $V=RI$

がそれぞれの抵抗において成立する。これを電圧の式に代入して、

$RI=R_1I+R_2I$

簡単にすると、

$R=R_1+R_2$

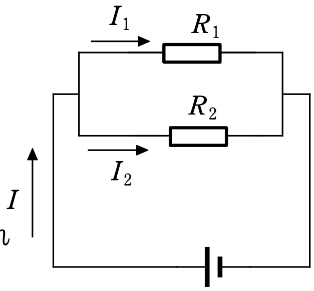
が成立する。これが直列の合成抵抗の式である。

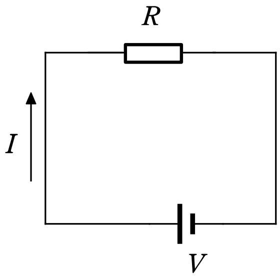
直列配線のときは電流が一定である。よって、$V=RI$より、$V$と$R$の比例関係があることがわかる。

また、電力の式 $P=IV=I^2R=\dfrac{V^2}{R}$で$I$が一定なので、電力$P$は$V$に比例し、$R$にも比例することが分かる。

(2)　並列配線

　並列配線の場合も同じ電圧にしたとき、同じ電流が流れるような1個の抵抗で置き換えることが抵抗の合成である。




　並列の場合は電流が枝分かれするので、それぞれの電流を$I_1$、$I_2$とする。その結果、

$$I=I_1+I_2$$

が成り立つ。オームの法則より、

$$V=RI、\quad V=R_1I_1\quad 、\quad V=R_2I_2$$

を代入して、

$$\frac{V}{R}=\frac{V}{R_1}+\frac{V}{R_2}$$

となる。簡単にして、

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

となる。これが並列の場合の合成抵抗を求める式である。

この式は実際に計算する時に時間がかかるので変形して

$$R=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$$

　この式を使えば計算が速い。しかし、この式は抵抗が二つの時の未成立し三つ以上の時は、$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$を利用のこと。

　この式は計算が複雑になるので、比を使えば効果的なことが多い。並列の場合は各抵抗にかかる電圧が同じなので、$V=RI$において、$R$と$I$が反比例することになる。よって、抵抗と電流は逆比の関係になる。

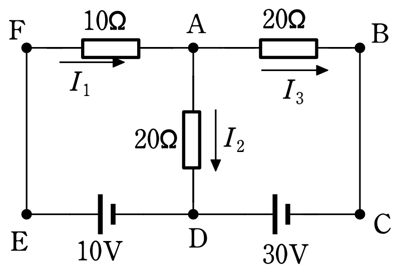
また、電力の式　$P=IV=I^2R=\frac{V^2}{R}$で$I$が一定なので、電力$P$は$V$に比例し、$R$に反比例

比例することが分かる。

| | 直列 | 並列 |
|---|---|---|
| 一定 | $I=$一定 | $V=$一定 |
| 和 | $V=V_1+V_2$ | $I=I_1+I_2$ |
| オームの法則 | $V,R$は比例 | $R,I$は反比例 |
| 抵抗の合成 | $R=R_1+R_2$ | $\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ |
| 電力関連 | $P$は$V,R$に比例 | $P$は$I$に比例、$R$に反比例 |

５．キルヒホッフの法則（必殺技）

抵抗の電気回路が確実に解ける方法




抵抗回路もコンデンサーと同様に確実に回路を解くことのできる方法がある。名づけて**キルヒホッフの法則**という。

右の例題を元にその方法を紹介しよう。

手順①　**各抵抗を流れる電流を仮定する。**

コンデンサーの場合は電気量を仮定したが抵抗の場合は電流を仮定する。抵抗の数だけ未知文字を使うことになる。よって、抵抗の数だけ方程式が必要になる。電流の流れる向きは前もってわからないこともあるので適当に決めてよい。後で方程式を解いたとき、電流がマイナスになったら、電流の向きが逆だったということになる。

手順②　**ある交差点に入る電流とその交差点から出る電流は等しい。方程式数は交差点数－1**

（キルヒホッフ第一法則）

回路上の交差点Aに注目すると、このA点にはE方面から電流$I_1$が流れ込み、B方面、D方面にそれぞれ$I_3$、$I_2$の電流が流れ出している。交差点に電気がたまることがなく、入ってきたものはすべて出て行くので、入ってきた電流と出て行った電流は等しくなる。よって、

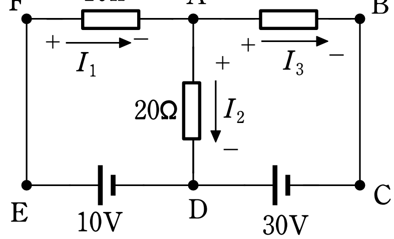
$I_1=I_2+I_3$　　（方程式１）

が成立する。

手順③　**閉回路に沿って一周したとき、回路上の電圧の和は0である。方程式数は最小回路数**

（キルヒホッフ第二法則）

これはコンデンサーのときとまったく同じ法則である。電位とは標高を表わし、電圧とは標高差をイメージすればよい。電流は＋から－に流れるので、各抵抗を流れる電流に沿って＋、－を記入して電圧の符号を考えるとよい。電流に沿って動く場合は、電位が下がり、逆に電流に逆らって移動する場合は電位が上がる。これを利用して方程式を作ればよい。




コンデンサーの場合と同じく、最小の経路で一周することにする。ここでは、DEFADのルートと、DABCDのルートで考えることにする。

•DEFADのルート

このルートでは、DからE方向へ向かう。途中に電池があり、マイナス側からプラス側へ抜けることになる。ここで、電位が10V上昇し、E点に到着。E点からF点へと向かうがこの間には何もないので電圧は0である。

FA間は抵抗を電流の流れに沿って移動することになるので電位が下がり、オームの法

則により$-10I_1$である。次のAD間も流れに沿って移動することになるので、電位は下がる。電圧は$-20I_2$である。一周すると、電圧の合計は0なので、

$$10-10I_1-20I_2=0 \qquad （方程式2）$$

が成立する。

•DABCDルート

D点を出発しA点に向かう。電流に逆らうので、電位が上がる。オームの法則より電圧は$+20I_2$となる。AB間は抵抗を電流に沿って移動するので電位は下がる。電圧は$-20I_3$である。B点からC点までは何もないのでBC間は電圧0。最後のBD間は電池があり、マイナス側からプラス側なので電圧は＋30Vである。一周したので電圧の和は0である。よって、

$$20I_2-20I_3+30=0 \qquad （方程式3）$$

が成立する。

方程式１，２，３を連立させて解くと各抵抗を流れる電流が求められる。

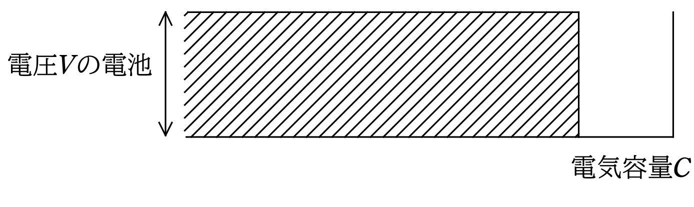
$I_1=1.25$A　$I_2=-0.125$A　　$I_3=1.375$A　となる。

この解において$I_2$が負の値になっているため、この抵抗を流れる電流は仮定と逆向きで下から上に0.125A流れていることになる。

## ６．直流電源

### ⑴　直流電源とは

電池をはじめとして一定の電流を流す装置を一般に直流電源と呼んでいる。しかし、直流電源の正式な定義は「電位差を維持するもの」と考えておいたほうが良い。つまり、いくら電流を流しても電源の電圧は変わらないと考える。いくらでも電流を流すことができるので、イメージとしては底面積（電気容量）無限大のバケツ（コンデンサー）と考えれば良い。

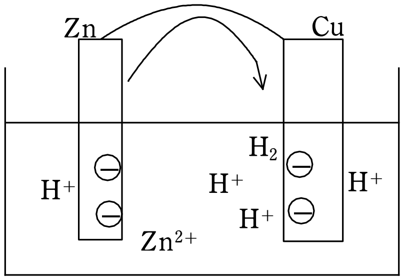



### ⑵　実際の電池

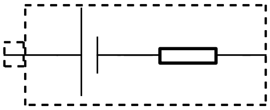
ところが実際の電池は、使うと電圧が下がる。これはどう考えればよいのであろうか。電池は化学的には、電極の金属のイオン化傾向と、溶液中の陽イオンのイオン化傾向の差で電圧が生じている。イオンが存在する限りイオン化傾向の差は一定であるから電池の電

圧は一定である。この電圧を起電力という。

ボルタの電池を元に考えてみると、$Zn$電極で$Zn$がイオン化して$Zn^{2+}$イオンとなる。この電子が$Cu$極のほうへ移動してそこで$H^+$が電子を受け取って、$H_2$分子となる。これは$Zn$と$H$とのイオン化傾向の差がこの電池の起電力となる。イオン濃度が高かろうが低かろうが起電力は同じである。




ところが電池を長時間使っていると、イオン濃度が下がり電流が減ってくる。これについて考えてみたい。電池内部にも抵抗があるが、この抵抗が小さいときは電池は多量の電流を流す能力があり、抵抗が大きくなると電池は電流を流すことができにくくなる。この電池内部の抵抗を内部抵抗という。



電池は右図のように考えればよい。新しい電池では内部抵抗が小さいが使い古すにつれ内部抵抗が大きくなる。このとき、起電力は変わらない。

電流は$I=envS$であらわされる。電池を直結すると、電圧は起電力$E$となる。内部抵抗を$R$としてオームの法則に代入すると、

$$E=RenvS$$

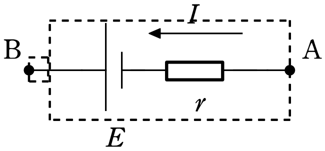
よって、

$$R=\frac{E}{envS}$$

この式において自由電子密度$n$はボルタの電池内では、$H^+$イオン数を意味し、$v$はイオンの移動速度、$S$は極板面積を意味している。最初は$H^+$イオン濃度は高いが次第に少なくなる。$n$が次第に小さくなるので$R$は時間と共に大きくなることが分かる。イオンの移動速度は温度によって影響を受ける。温度が低くなると内部抵抗は大きくなるのである。

### (3) 起電力･内部抵抗の測定方法

多くの問題では内部抵抗を無視して計算してよいことになっているが、時々内部抵抗が無視できない問題が出題される。その場合は内部抵抗のない電池と別の抵抗との直列接続として問題を解けばよい。しかし、内部抵抗や起電力を正確に測定する問題も出題される。起電力を$E$、内部抵抗を$r$としたとき、電池の正極と負極の間の電圧$V$（この電圧を端子電圧という）を求めてみよう。



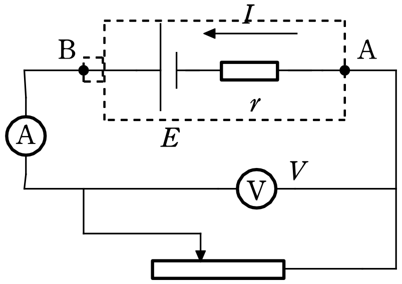

この電池内を電流$I$が流れているとし、A点からB点に向けて電圧を計算してみる。

A点から抵抗を通過する間に流れに沿うので、電位が$rI$下がる。電池で、マイナスからプラスに移動するので、$E$電位が上がる。よって、A点からB点までいく間に$E-rI$だけ電位が上がることになる。よって、端子電圧$V$は

$$V=E-rI$$

という関係になる。ここで、$E$と$r$は直接測定できない。そこで、正確に起電力を測定す

るには電流を0にすればよいことがわかる。電流を0にすれば、$V=E$となり、直接測定できるのである。

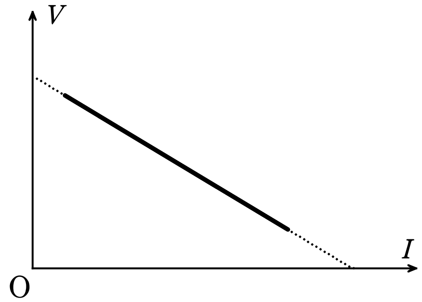



その測定回路が右図の回路である。
この回路を組んですべり抵抗器の抵抗を変えることにより、電流計と電圧計の針を読み取ってグラフにする。

電圧計の読みを$V$、電流計の読みを$I$とすると、電圧1周＝0より、

$-rI+E-V=0$

$V=E-rI$




この式の切片が起電力$E$、傾きが内部抵抗$r$である。縦軸を$V$、横軸を$I$として、測定値をグラフにして、切片と傾きを読み取れば、電池の起電力と、内部抵抗の測定ができる。

測定値は電流、電圧共に0になることはない。右のグラフの太線部分しか測定できないが、一次関数であることが分かっているので、そのまま延長して、切片を測定すればよい。この切片は電流が0のときの電圧である。

(4)　電池の最大消費電力

上図において、すべり抵抗器の消費電力を最大とするすべり抵抗器の抵抗$R$を求めてみよう。

キルヒホッフの法則より　　$V=E-rI=RI$

電流$I$は　　$I=\dfrac{E}{R+r}$

抵抗の消費電力は　$P=RI^2=\dfrac{RE^2}{(R+r)^2}$

変数を$R$としてこの関数が最大となる$R$および$P$を計算する。
$R$で微分すると

$$\frac{dP}{dR}=\frac{(RE^2)'(R+r)^2-RE^2\{(R+r)^2\}'}{(R+r)^4}$$

$$=\frac{E^2(R+r)^2-2RE^2(R+r)}{(R+r)^4}=\frac{E^2(-R+r)}{(R+r)^2}$$

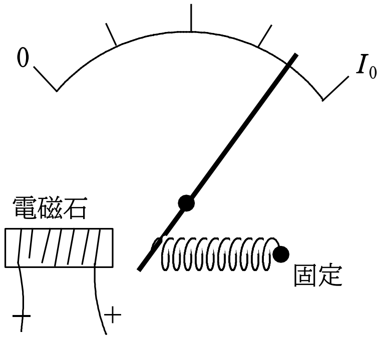
これが0となるには$R=r$のときで、そのときの最大電力は

$$P=\frac{E^2}{4r}$$

電池の内部抵抗と同じ抵抗のとき、その抵抗の消費電力が最大となる。この電力以上の消費電力は得られない。

## ７． 電流計と電圧計

### ⑴ 電流計とは



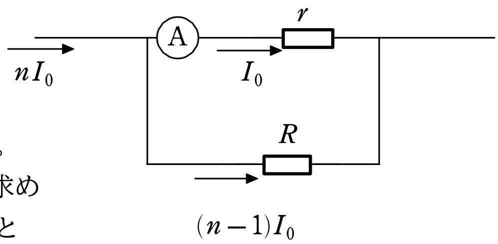

右図は電流計の原理がわかるようにした簡易電流計である。電磁石の磁力は電流の大きさに比例する。その磁力で、針を動かすようにしているのが電流計である。

電流を流さないと針を動かすことができないように電流計にも内部抵抗があり、電流計を接続することにより、回路を流れる電流に変化が起こるため電流計で電流を正確に測定することができない。唯一正確なのは電流が0のときだけである。電流が0のときは電流計をつなごうがつなぐまいが電流が0であるから、0だけは正確に測定できる。その能力を特に高めたのが検流計である。

少しでも正確に電流を測定するには電流計を接続することで電流が変化しないようにする必要がある。電流計の内部抵抗が0であれば、電流計をつないでもつながなくても回路の電流は変化しないので、内部抵抗0の電流計が理想であるがそのようなものはない。そこで、**内部抵抗をできるだけ小さくした電流計が理想**である。

### ⑵ 分流器について

電流計にあまりに多くの電流を流すと、針が振り切れてしまう。電流計には測定限界がある。今測定限界$I_0$、内部抵抗$r$の電流計があったとする。この電流計で$n$倍の電流$nI_0$の測定を可能にするためには、どうすればよいであろうか？




電流計には$I_0$までしか流せないのであるから、バイパス回路を作り残りの電流$(n-1)I_0$を、そのバイパスに流し込んでやればよいことになる。

そのときのバイパス回路の抵抗$R$を求めてみよう。並列配線になるので、抵抗と電流は逆比となる。よって、

$$I_0:(n-1)I_0=R:r$$

これより、

$$R=\frac{r}{n-1}$$

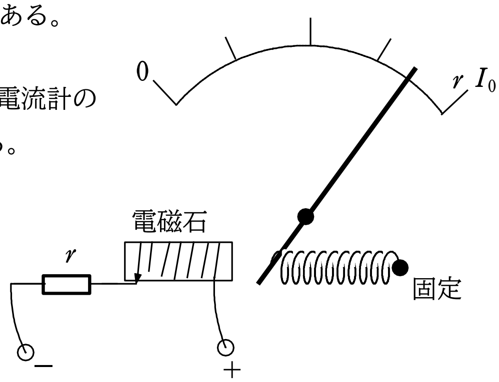
となる。

**「内部抵抗の$\frac{1}{n-1}$の抵抗を電流計と並列につなげば、電流計の限界電流を$n$倍にできる。」**

これを**分流器**という。

### ⑶ 電圧計について

　電圧計は基本的に電流計と同じ装置である。
電流計に抵抗$r$を図のように取り付けた。
この電流計に電流$I_0$が流れた場合、この電流計の端子間に$rI_0$の電圧がかかったことになる。
この装置を電圧計という。
あとはメモリ板を電圧を表わすように張り替えればよい。

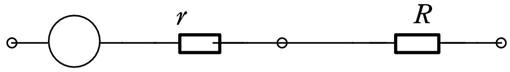



　電圧計は回路に並列につなぐために電圧計になるべく電流が流れないようにすれば正確になる。**電圧計は内部抵抗$r$をできるだけ大きくすると良い。**

(4)　倍率器

　電圧計も限界電圧がある。ある電圧計の限界電圧$V_0$を$n$倍の$nV_0$まで測れるようにするにはどうすればよいのであろうか？

　電圧計は抵抗を電流計につりつけることでできている計測器である。




この抵抗が大きくなれば、それだけ高い電圧まで測定できる。限界電圧が$V_0$ということは電流計の性質を考えて、限界電流$I_0$との関係が

$$V_0 = rI_0$$

であることを意味している。
もし抵抗$R$を外部に直列に取り付ければ、限界電流を$I_0$とすれば、$(R+r)I_0$まで測れることになる。これが、$nV_0$になればよい。よって、

$$nV_0 = (R+r)I_0$$

この2式から$I_0$を消去すると、

$$nV_0 = \frac{R+r}{r}V_0$$

これより、

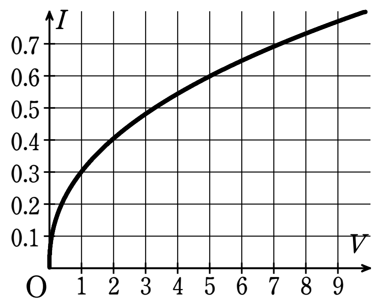
$$R = (n-1)r$$

**「内部抵抗の$n-1$倍の抵抗を電圧計に直列につなぐと、$n$倍の電圧まで測れるようになる。」**

　これを倍率器という

８． 非オーム抵抗

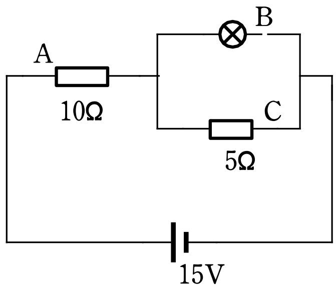
電球のように強く熱を発する抵抗はその温度上昇により、抵抗が一定ではない。高い電圧をかければかける程、抵抗が大きくなり、電流と電圧の関係は右図のような特性曲線を描くようになる。




このような非オーム抵抗の回路計算はどのようにすればよいのだろうか？

この特性曲線が一つの方程式を表していると考えればよい。もうひとつ方程式を作り、そのグラフを重ね書きして、その交点を求めればよいのである。

＜例＞




右のような回路において電球Bを流れる電流と電圧を求めてみよう。

特性曲線を使うために電球の電流を$I$、電圧を$V$とする。

Cを流れる電流を$i$とすると、キルヒホッフの法則より

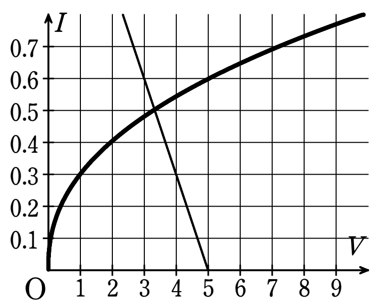
$V=5i$ …①

$10(I+i)+V=15$…②

②より $10I+10i+V=15$

①より $10I+3V=15$ $I=1.5-0.3V$

これを特性曲線に重ね書きをすると、右のようになる。この交点が求めるものとなる。




$I=0.5$A $V=3.3$V

となる。

９． ホイートストンブリッジ

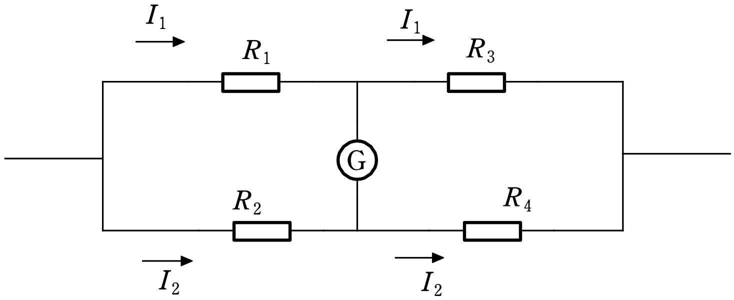
抵抗を正確に測る方法

電流計自体に抵抗があるので、電流計を用いてもその測定値は厳密なものではない。ところが、その電流計でも、0Aのみは電流が流れていないことを意味し、正確である。

そこで、電流計（この場合は検流計）の0のみを用いて抵抗値を正確に測定する方法を考えてみよう。

下のような回路を考える。検流計Gに電流が全く流れていないとすれば、4つの抵抗$R_1$、$R_2$、$R_3$、$R_4$の間にどのような関係が成り立つか求めてみよう。

# 電気抵抗




抵抗$R_1$を流れる電流を$I_1$とすると、$R_2$を流れる電流も$I_1$である。同様に、$R_3$、$R_4$を流れる電流を$I_2$とする。

キルヒホッフ第二法則より　　$-R_1I_1+R_2I_2=0$　これは　$R_1I_1=R_2I_2$

同様にして　$R_4I_2=R_3I_1$

この2式の各辺どおしの積を計算すると　$R_1I_1R_4I_2=R_2I_2R_3I_1$

簡単にすると　　$R_1R_4=R_2R_3$

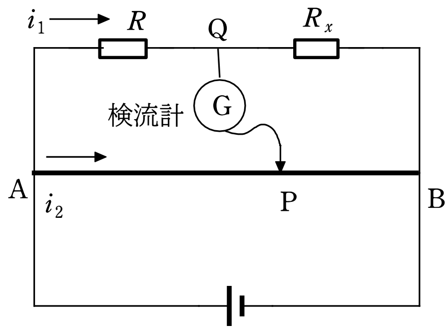
この式により、　4つの抵抗の内3つが正確にわかっていれば、残り1個の抵抗を正確に計算することができる。この回路をホイートストンブリッジという。

＜例題＞

既知抵抗$R$と未知抵抗$R_x$、及び一様な材質太さで長さ$l_0$の抵抗線ABを図のように配線し、検流計の針が0を指すように接点Pを固定した。

このときのAPの長さを$l$とする。

未知抵抗$R_x$を求めよ。




＜解説＞

この回路はホイートストンブリッジを形成している。よって、

$$R_xR_{AP}=RR_{PB}$$

が成立する。

抵抗は長さに比例するので、ABの抵抗を$r$とすると、

$$R_{AP}=r\frac{l_0}{l}\quad 、R_{PB}=r\left(1-\frac{l_0}{l}\right)$$

これを代入すると、

$$R_xr\frac{l_0}{l}=Rr\left(1-\frac{l_0}{l}\right)$$

これを簡単にして、

$$R_x = R\frac{l_0 - l}{l_0}$$

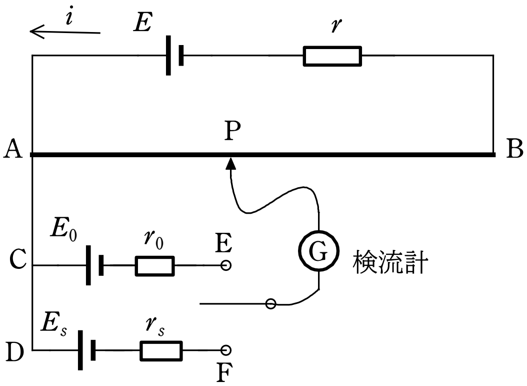
このようにして、未知抵抗の測定ができる。

この状態で、接点Pをわずかに B側にずらすとPQ間の電流はどちらに流れるであろうか？このときは、抵抗が小さくなったところに電流が増えると考えればよい。AP間の電流が減りPB間の電流が増えることになるので、Q→Pの方向に電流が流れることが予想できる。

10. メートルブリッジ

電池の起電力を正確に測定する装置をメートルブリッジという。

一様な材質で一様な太さの抵抗線ABに起電力$E$、内部抵抗$r$の電池をつなぎ、起電力$E_0$、内部抵抗$r_0$の電池と起電力$E_s$、内部抵抗$r_s$の電池を図のようにつないだ。切り替えスイッチを通して検流計をつなぎ、抵抗線AB上を滑らすことができるようにした。ここで、検流計は電流が流れているかどうかが正確に判定できる装置である。




ここで値がわかっているのは電池Cの起電力$E_0$のみで、あとはすべて未知であるとする。このとき、起電力のわかっていない電池Dの起電力$E_s$を正確に測定する方法を考えてみよう。電池には内部抵抗がありいずれも未知であるため、電流を0にする以外に正確な測定はできない。よって、スイッチをEまたはFにして、そのとき検流計を流れる電流が0になるように抵抗線上の接点Pを動かすのである。検流計を流れる電流が0であるから、切り替えスイッチをEにしてもFにしても抵抗線ABを流れる電流は同じ電流である。また、抵抗線は一様であり、抵抗の大きさは長さに比例するので、AP間の抵抗は長さを測定すればよい。

スイッチをEに接続し、検流計が0を指すように接点Pを動かしたところAP＝$l_0$になったとする。この$l_0$は長さであるから、正確に測定できる。この抵抗の大きさを$R$とする。この抵抗値は不明である。この抵抗線を流れている電流を$i$とすると、AP間の電圧は$Ri$となり、同時にこれは起電力$E_0$と等しい。ここで、

$$E_0 = Ri$$

が成立している。

次にスイッチをFに切り替えて検流計が0を指すように接点Pを動かしたところAP=$l_s$のとき、検流計が0になったとする。そうすると、抵抗値$x$は長さに比例するので、

$$l_0 : l_s = R : x$$

が成立する。よって、$x = R\frac{l_s}{l_0}$となる。電流は$i$であるから、この場合のAP間の電圧は

$$xi = R\frac{l_s}{l_0}i$$

である。これはDFの電圧と等しいので、$E_s = R\frac{l_s}{l_0}i$となる。

$E_0 = Ri$を代入すると、

$$E_s = R\frac{l_s}{l_0}i = E_0\frac{l_s}{l_0}$$

となる。$E_0$、$l_0$、$l_s$ともに正確にわかっているから、電池の未知起電力$E_s$は正確に測定できるのである。この測定装置をメートルブリッジという。

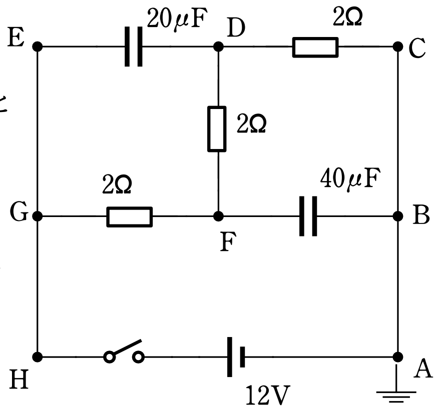
11．コンデンサーと抵抗のミックス回路

コンデンサーと抵抗がミックスになった回路の計算方法を考えてみよう。

このタイプの問題は、スイッチを入れた瞬間とそれから充分に時間がたったときの計算が問われる。それぞれの場合について考えて見よう。

スイッチを入れる前にED間のコンデンサーは電荷がたまっていなかったが、FB間のコンデンサーはF側を正極として160$\mu$Cの電荷がたまっているとする。

この回路を例として考察する。

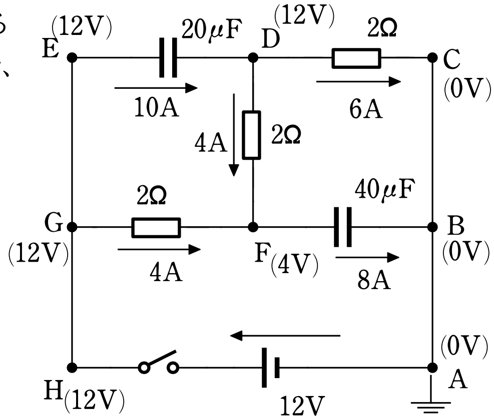



(1) スイッチを入れた直後

コンデンサーがあるので直接の回路計算はできない。しかし、コンデンサーの初期の電気量はわかっているはずであるからコンデンサー両端の電圧が計算できる。そのため、回路内の電位を調べると良い。

コンデンサーFBは160$\mu$Fの電荷がたまっているので、その両端電圧は4Vである。コンデンサーEDのほうは電荷がたまっていないので両端電圧は0である。このことを用いてスイッチを入れた直後のA点からの電位を調べてみる。

まず、Aは0V、そこと直接つながっているB,Cも0Vである。Hは電池を介しているので、12V、E,Gはそれと直接つながっているから12Vである。Dはコンデンサー両極の電圧が0であるから、EDと同電位になり12V、FはFB間が4VでFの方が高いので、Fは4Vとなる。これをまとめたのが右図である。これで、各点の電位がわかったので、抵抗を流れる電流が計算できる。




GF間が8Vなので、G→Fの方向に

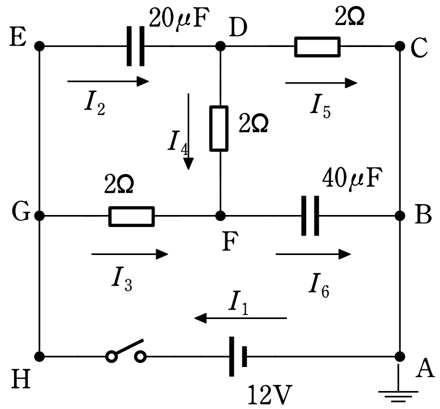
4A、DF間はD→Fの方向に8Vなので電流は4A、
DC間は12Vなので、D→Cの方向に6Aの電流が流れている。キルヒホッフの第一法則によりED間と、FB間の電流が求められる。

**「コンデンサーが空のときは、コンデンサー両端の電位は等しい」**

**「スイッチを入れた直後は電位を調べよ。」**

＜別解＞

コンデンサー回路と、キルヒホッフの法則のミックスで解くこともできる。




手順１

•コンデンサーにたまっている電気量の仮定

→　たまっている電気量はわかっているので不要

•抵抗•コンデンサーを流れる電流の仮定

→　右図のように$I_1$～$I_6$を仮定

手順２

・　コンデンサーで回路を分割し各領域の電気量は保存される。

→　この回路は分割不能

・　交差点に入る電流と出る電流は等しい。

→　交差点数４つなので方程式３つ

交差点G　　$I_1=I_2+I_3$…①

交差点D　　$I_2=I_4+I_5$…②

交差点F　　$I_3+I_4=I_6$…③

手順３

→　電圧１周＝0

最小回路が3つなので方程式は3つ

AHGFBのコース　　$12-2I_3-\dfrac{160\mu}{40\mu}=0$…④

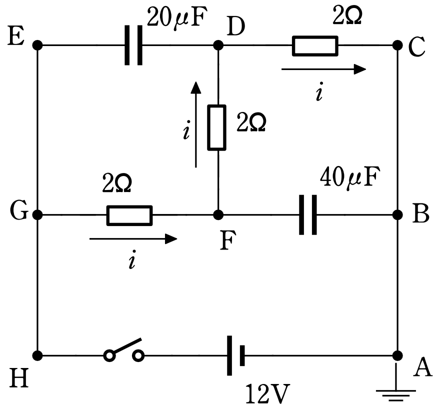
GEDFのコース　　$-2I_4+2I_3=0$　…⑤

DCBFのコース　　$-2I_5+\dfrac{160\mu}{40\mu}+2I_4=0$　…⑥

未知数6個方程式6個でこれらを連立させれば解ける。

$I_1=14\text{A}$　$I_2=10\text{A}$　$I_3=4\text{A}$　$I_4=4\text{A}$　$I_5=6\text{A}$　$I_6=8\text{A}$

⑵　スイッチを入れてから充分に時間がたったとき




スイッチを入れてから充分に時間がたったときはコンデンサーが満タンになっている。コンデンサーが満タンになっているときは、電流がコンデンサーに流れていないことを意味している。（もし流れていれば、コンデンサーの電気量がもっと増えることになる）

電流がわかるので、回路の電流を調べればよい。電池から$i$の電流が流れたとすると、ED間は電流が流れないので、GF間に$i$が流れる。FB間に電流が流れないので、FD間が$i$である。ED間が流れないのでDC間が$i$となる。

キルヒホッフの第二法則でHGFDCBAHと電圧を調べれば

$12+2i+2i+2i=0$

これより、$i=2$Aと計算できる。

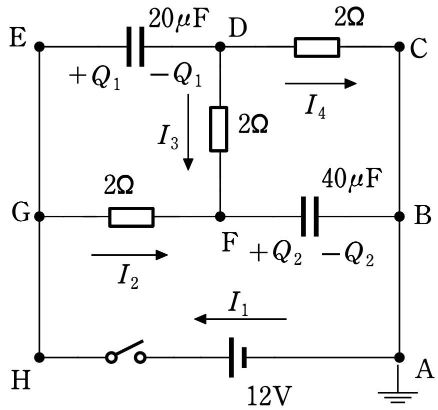
これから、任意の位置の電位計算ができる。

**「コンデンサーが満タンのときはコンデンサーを流れる電流が0である。」**

**「スイッチを入れてから充分に時間がたったときは電流を調べよ。」**

＜別解＞

コンデンサー回路と、キルヒホッフの法則のミックスで解くこともできる。




手順１

•コンデンサーにたまっている電気量の仮定

→　右図のように$Q_1$、$Q_2$を仮定

•抵抗•コンデンサーを流れる電流の仮定

→　右図のように$I_1$～$I_4$を仮定

手順２

• コンデンサーで回路を分割し各領域の電気量は保存される。

→　この回路は分割不能

• 交差点に入る電流と出る電流は等しい。

→　交差点数４つなので方程式３つ

交差点G　　$I_1=I_2\cdots$①

交差点D　　$I_3+I_4=0\cdots$②

交差点F　　$I_2+I_3=0\cdots$③

手順３

→　電圧１周＝0

AHGFBのコース　　$12-2I_2-\dfrac{Q_2}{40\mu}=0\cdots$④

GEDFのコース　　$-\frac{Q_1}{20\mu}-2I_3+2I_2=0$　…⑤

DCBFのコース　　$-2I_4+\frac{Q_2}{40\mu}+2I_3=0$　…⑥

未知数6個方程式6個で①～⑥を連立させれば解ける。

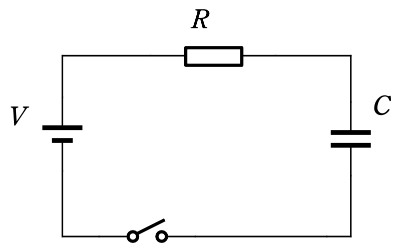
$I_1=2\text{A}$　$I_2=2\text{A}$　$I_3=-2\text{A}$　$I_4=2\text{A}$　$Q_1=160\mu\text{C}$　$Q_2=320\mu\text{C}$

となる。

12. 抵抗を含むコンデンサー回路の消費電力

(1) 抵抗の消費電力

起電力$V$の電池に電気容量$C$のコンデンサー、抵抗値$R$の抵抗を右のように繋いだ。最初コンデンサーに電気はたまっていなかったとした時、電池の仕事はどのように使われるのだろうか。

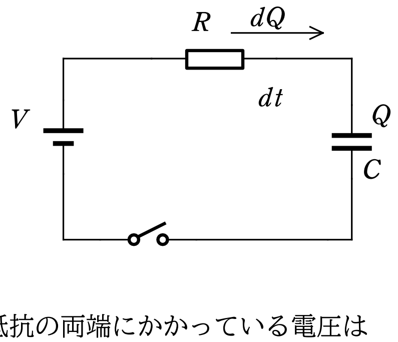



最初はコンデンサーに電気がたまっていないので、抵抗の両端には$V$の電圧がかかっている。そのため、$\frac{V}{R}$の電流が流れるが、コンデンサーに電気がたまってくるに従って、抵抗の両端の電圧は次第に小さくなる。やがて、コンデンサーの電圧が0になった時、抵抗の電圧は0になり、流れる電流は0になる。このように抵抗に流れる電流に変化が生じているので、抵抗で消費する電力を$P=IV$で計算することができない。

このとき、コンデンサーに最終的にたまった電気量$Q$は$CV$なので、電池のした仕事は$W=QV=CV^2$、一方でコンデンサーにたまった電気エネルギーは$\frac{1}{2}CV^2$なので、その差の分だけ抵抗で消費したことになる。よって、抵抗での発熱量は$\frac{1}{2}CV^2$となる。

(2) 電流変化（参考）

これを微分的に考えてみよう。ある瞬間コンデンサーに電荷$Q$がたまっているとする。このとき、微小時間$dt$間に微小電荷$dQ$がコンデンサーに移動したとすると、抵抗を通過した電流は$I=\frac{dQ}{dt}$とあらわされる。




このとき、コンデンサーの電圧は$\frac{Q}{C}$なので、抵抗の両端にかかっている電圧は$V-\frac{Q}{C}$である。オームの法則より

$$R\frac{dQ}{dt}=V-\frac{Q}{C}$$

これは、

$$CR\frac{dQ}{dt}=-(Q-CV)$$

$$\frac{dQ}{Q-CV}=-\frac{dt}{CR}$$

両辺を不定積分すると

$$\log_e|Q-CV|=-\frac{t}{CR}+\text{定数}$$

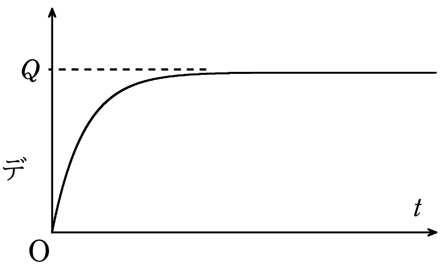
これは、

$$Q-CV=\text{定数}\times e^{-\frac{t}{CR}}$$

$t=0$のとき、$Q=0$（コンデンサーは最初空）なので、定数$=-CV$

よって、$Q=CV\left(1-e^{-\frac{t}{CR}}\right)$

となる。この関数をグラフにすると右図のようになる。

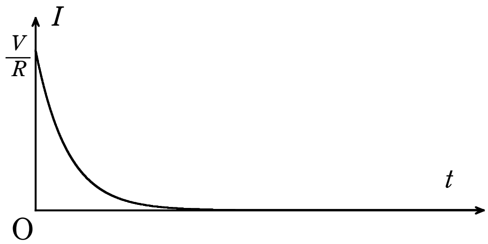



このグラフを見てわかるように、コンデンサーにたまる電荷は最初は急激に増加するが次第に緩やかになって、満タンになるのである。

一方流れる電流は

$$I=\frac{dQ}{dt}=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

である。これをグラフにすると、右のようになる。これをみると、最初は電流が大きいが次第に0になっていくことが分かる。



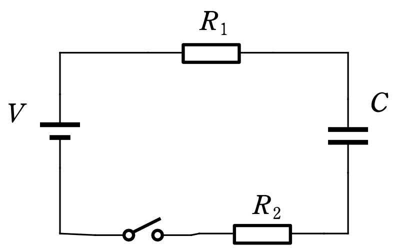

抵抗での消費電力は、各瞬間の消費電力を総合計すればよいので、

$$\int_0^\infty RI^2dt=\int_0^\infty\frac{V^2}{R}e^{-\frac{2t}{CR}}dt=\left[-\frac{1}{2}CV^2e^{-\frac{2t}{CR}}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}CV^2$$

となり、(1)と同じ結果となる。

(3)　消費電力例題

起電力$V$の電池に電気容量$C$のコンデンサー、抵抗値$R_1$、$R_2$の抵抗を右のように繋いだ。最初コンデンサーに電気はたまっていなかったとした時、各抵抗の消費電力を求めよ。




＜解説＞

コンデンサーに最終的にたまった電気量は$CV$なので、電池のした仕事は$W=QV=CV^2$、一方でコンデンサーにたまった電気エネルギ

ーは$\frac{1}{2}CV^2$なので、その差の分だけ抵抗で消費したことになる。よって、抵抗での発熱量は$\frac{1}{2}CV^2$となる。

この場合抵抗が二つある。その二つの抵抗の消費電力の合計が$\frac{1}{2}CV^2$である。それぞれの消費電力はどのようにしたら求められるのであろうか。

消費電力の式は　$P=I^2R$　であらわされる。電流$I$は時間とともに変化するのではあるが、$R_1$、$R_2$を流れる電流は必ず同じである。よって、消費電力は抵抗に比例することになり、比例配分すればよいことが分かる。

抵抗$R_1$の消費電力　$\frac{1}{2}CV^2\times\frac{R_1}{R_1+R_2}$

抵抗$R_2$の消費電力　$\frac{1}{2}CV^2\times\frac{R_2}{R_1+R_2}$

となる。