コンデンサー

１．コンデンサー

電場の定義は次の3通りである。

① ＋1Cに作用する力　$F=qE$

② 電気力線密度　$E=\dfrac{Q}{\varepsilon S}$

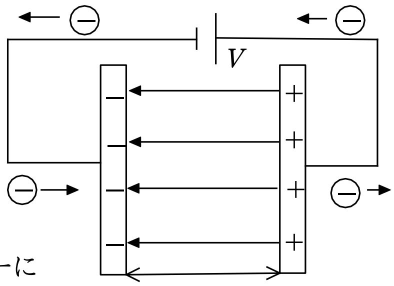
③ 電位の傾き　$V=Ed$

この3通りの電場の定義が頭の中でひとつになれば、多くの問題が解ける。その練習にはコンデンサーの誘導が一番良い。

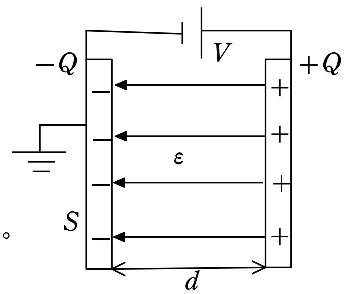
⑴ 電気容量

金属板を平行に並べて、電荷がたまるようにしたものを**コンデンサー**という。

平行に並べた金属板に電圧をかけた場合負極から出た電子は金属板の負極板にたまる。負極板にたまった自由電子の反発力を受けて正極板にある自由電子が、電池の正極に向けて流れ出す。その結果、右側の金属板が正極板となる。一度たまった電気は互いのクーロン力によりその状態が維持される。このようにしてコンデンサーに電気がたまるのである。



２枚の金属板（断面積S）を距離dだけ離して平行に置き、金属板間を誘電率εの誘電体で満たした。この装置（コンデンサー）に電圧Vの直流電圧をかけた。このとき、極板にたまる電気量を求めてみよう。

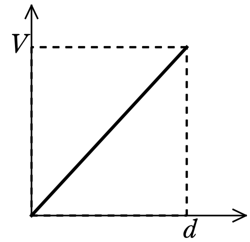


電場の定義②と③は同じものである。ここに注目する。右の図において、電気力線密度が電場の強さである。

このことより、電荷Qから出る電気力線数は$\dfrac{Q}{\varepsilon}$

であるから、電気力線密度すなわち電場の強さは

$$E=\frac{Q}{\varepsilon S}$$



となる。　また、右のグラフにおいて電場の強さは電位の傾きである。よって、

$$E=\frac{V}{d}$$

どちらも電場の強さを表わしているのでこの二つの式は等しくなる。よって、

$$E=\frac{Q}{\varepsilon S}=\frac{V}{d}$$

これより、

$$Q=\varepsilon\frac{S}{d}V$$

が成立する。

このうち、$\varepsilon\dfrac{S}{d}$はいずれもコンデンサー内部の要素であるから、この値はコンデンサーの性能を表わしているといえる。この値を電気容量といい、単位は[F:ファラド]である。

この電気容量をCで表わすと、

$$C=\varepsilon\frac{S}{d}$$

が成立し、また、

$$Q=CV$$

が成り立つ。

⑵　電気容量の意味

　コンデンサーは電気をためる装置で、たまった電気量がQで、電圧がVである。$Q=CV$のVを1とすれば$C=Q$である。

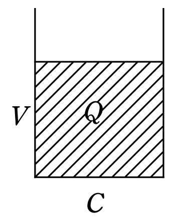
　「電気容量は1Vでためられる電気量を表わしている。」

　我々の世界において水をためるものにバケツがあるが、このバケツとイメージを重ねてみよう。

　右図のようにバケツの中に入っている水の体積に相当するのが、電気量Qで、たまっている水の深さが、電圧Vである。そうすると、$Q=CV$の関係より、Cはバケツの底面積となる。

「電気容量は電気をためる容器の底面積である。」

といえる。

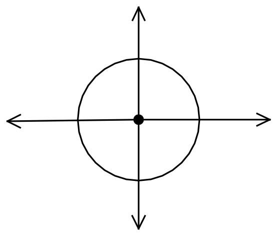


＜例題＞

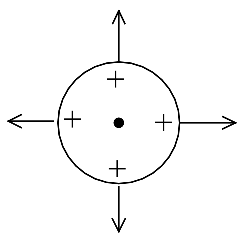
　半径rの金属球に$+Q$の電荷を帯電させた。この球のコンデンサーの電気容量を求めよ。

＜解説＞

　正極が球で負極が存在しないのでコンデンサーにならないと考えがちであるが、負極は無限の彼方にあると考えればよい。電気容量は基本的に$Q=CV$の式を作れば求められる。



Qの点電荷の周りの電位は　$V=\dfrac{kQ}{r}$である。金属球が帯電した場合、中心にその電荷があるとした電気力線上の表面に電荷がたまっていると考えられるので、中心に電荷Qがたまっていると考えてもよい。



$$Q=\frac{r}{k}V$$

　よって、電気容量は　$\dfrac{r}{k}$

２． コンデンサーの電気容量変更

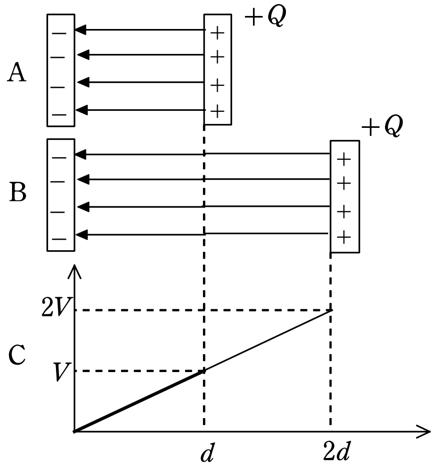
この分野では負極板をアースしていると考える。つまり、負極板の電位は0である。

また、

「電気力線密度＝電位の傾き」

に注目のこと、気づきにくいのでなれるようにしておくとよい。

⑴ 極板間距離の変更（Q＝一定）



右図Aのように2枚の金属板に$+Q$及び、$-Q$の電荷を帯電させ、距離dだけ離して平行に置いた。このとき、電気力線は平行になっている。このことは、極板間すべての領域で電気力線密度が同じことを意味しており、極板間の電場は一定となる。実際は電気力線が中央で若干広がるために中央部の電場が少し弱くなるが、dが極板面積に対して極めて小さい場合を扱うので、電気力線は平行と考えてよい。そのため、

「コンデンサー内の電場の強さは一定である。」

といえる。

コンデンサー内の電場の強さが一定であるため、グラフCにおけるグラフの傾き（電場）は一定である。傾き一定のグラフは直線である。

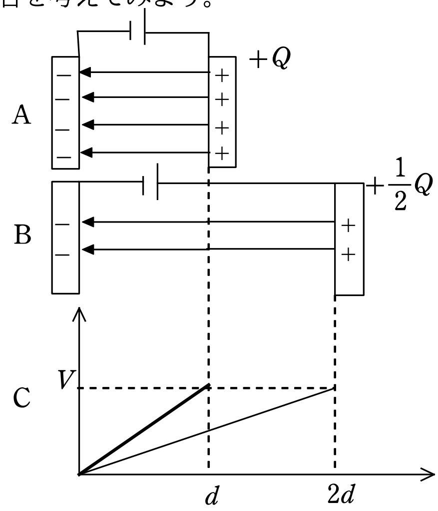
この状態で、Qを一定に保ったまま、極板間隔を2倍に広げる操作をする。電気量Qは電源からしか供給されないため、Qを一定に保つということは電源を切り離して極板を動かすということである。この場合、電気量Qに変化がないため、電気力線数に変化がない。極板面積も一定であるから、電気力線密度すなわち電場が一定となる。グラフCにおけるグラフの傾きをそのままにして2倍に伸ばすと、電位も2倍となる。

(2)　極板間距離の変更（V＝一定）

次に、電源をつないだまま極板を動かす場合を考えてみよう。

図AとグラフCを見比べてみよう。

極板距離dの位置での電位はVであるから、Cの太線ようなグラフになる。電位を一定にしたまま距離を2倍にすると、グラフCにおける細線のグラフのようになる。



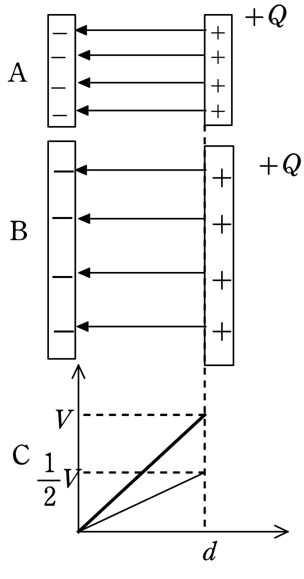
この細線のグラフは、太線のグラフの傾きの$\frac{1}{2}$である。つまり、電場の強さが$\frac{1}{2}$になったことを意味している。この場合図Bのように電気力線密度すなわち電気力線数が$\frac{1}{2}$になったことになり、電気量が$\frac{1}{2}$になっている。このとき、減った分の電荷は極板から電源に戻ったということである。

(3)　極板面積の変更（Q＝一定）

Qを一定にして極板面積を変化させる場合はどうなるであろうか？

図Aの状態をグラフにしたのが、グラフCの太線のグラフである。この状態で極板面積を2倍にした場合、電気量すなわち電気力線数は変わらないが、面積が2倍になっているので、電気力線密度は$\frac{1}{2}$になっている。つまり、図Bのようになるのである。この場合グラフCでは、太線のグラフより傾きが$\frac{1}{2}$の細線のグラフになる。

その結果、電位は$\frac{1}{2}V$である。

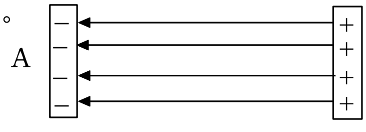


(4)　極板間に導体を挿入した場合（Q＝一定）

次は極板間に導体を挿入する場合を考えてみる。

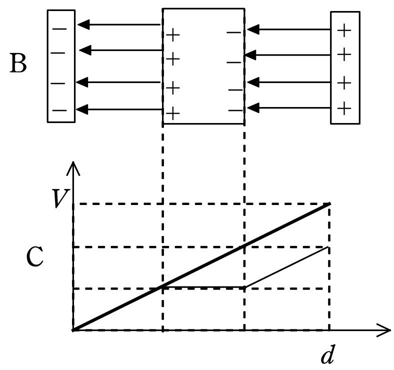
中央の$\frac{1}{3}$に金属を挿入したのが図Bである。

Qが一定であるため、電気力線数は挿入前後で



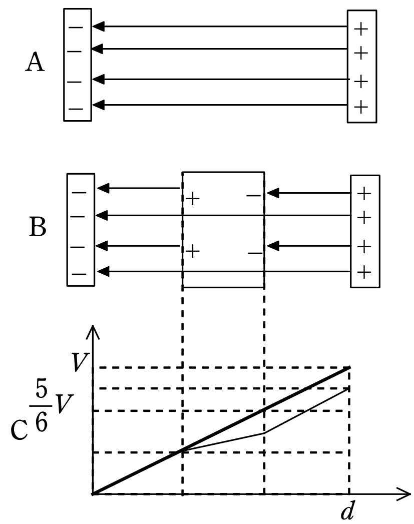
変わらない。そのため電気力線密度が導体の外側では同じであり、電場の強さも挿入前と変わらない。一方導体内部は電気力線が存在しないため、電場が0となる。

この電場の強さをグラフにしたのがグラフCの細線のグラフである。このため、電位は$\frac{2}{3}V$となっている。



⑸　金属板間に誘電体を挿入した場合（Q＝一定）

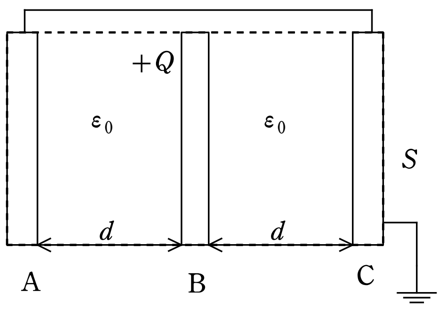
図Bのように極板間の中央$\frac{1}{3}$に比誘電率2の誘電体を挿入してみる。この場合、誘電体内の電気力線数が外部の$\frac{1}{2}$になるので、電場の強さが誘電体内部で外部の$\frac{1}{2}$となる。これをグラフにしたのがグラフCの細線である。誘電体内は電場が$\frac{1}{2}$であるから、グラフの傾きが$\frac{1}{2}$になっている。極板の電位は$\frac{5}{6}V$となる。



３．容量に関する例題

＜例題１＞

同じ面積Sの等しい金属板A,B,Cを空気中で間隔dで平行に並べた。A、Cを直結しアースしBを電気量$+Q$で帯電させた。この時、極板Bの電位および、この装置全体の電気容量を求めよ。



＜解説＞

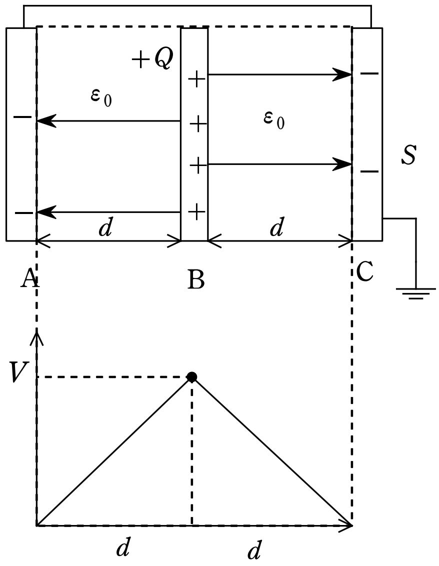
「電気力線密度＝電位の傾き」

を重視する。

アースの意味

①　電位を0にする。

②　＋電荷と－電荷が同数になる。



図の下に、電位を表すグラフを記入する。A,Cはアースされているので、A,Cの位置で電位が0となる。Bの位置の電位は不明なのでVとする。

電場は一様なので直線でつなぐと、右下のグラフとなる。グラフの傾きは等しいので、AB間とBC間の電場の大きさは等しい。

電気力線密度が等しくなるので電気力線を記入すると、上の図のようになる。

この図を見て、A、C極板にたまっている電気量は$-\dfrac{Q}{2}$となる。

AB間の電位の傾きは$\dfrac{V}{d}$となる。

B極板から出る電気力線総数は$\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$本で、

これが、AB間とBC間に等分されているのでAB間の電気力線数は$\dfrac{Q}{2\varepsilon_0}$本。よって、電気力線密度は$\dfrac{Q}{2\varepsilon_0 S}$である。

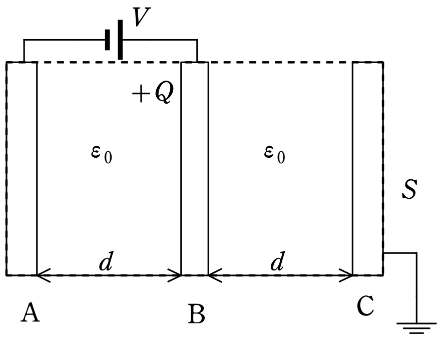
「電気力線密度＝電位の傾き」より、

$$\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}=\frac{V}{d}$$

この式より　$V=\dfrac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$　これが、極板Bの電位である。

また、　$Q=\dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}V$なので、電気容量$C$は　$\dfrac{2\varepsilon_0 S}{d}$　となる。

＜例題２＞



例題１と同様な装置で極板A,B間に電圧Vの電池が取り付けられ、極板Bに$+Q$の電荷が与えられた場合、極板Cのもつ電気量、および極板Aの電位を求めよ。

＜解説＞

Aの電位をV_0、Cの電気量を$-xQ$とすると、

BC間の電気力線密度は、$\dfrac{xQ}{\varepsilon_0 S}$

アースすると、全体の正電気量と負電気量は等しくなるので、極板Aの電気量は$-(1-x)Q$となる。よって、AB間の電気力線密度は　$\dfrac{(1-x)Q}{\varepsilon_0 S}$

Aの電位がV_0なので、Bの電位は$V+V_0$となる。

BC間の電位の傾きは $\dfrac{V+V_0}{d}$　ＡB間の電位の傾きは $\dfrac{V}{d}$

電気力線密度と電位の傾きは等しいので、

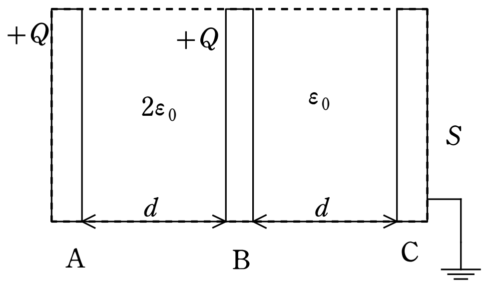
ＡB間　$\dfrac{(1-x)Q}{\varepsilon_0 S}=\dfrac{V}{d}$　・・・①

BC間　$\dfrac{xQ}{\varepsilon_0 S}=\dfrac{V+V_0}{d}$　・・・②

　これを解くと　$x=1-\dfrac{\varepsilon_0 SV}{Qd}$　$V_0=\dfrac{Qd}{\varepsilon_0 S}-2V$

＜例題２＞

　同じ面積Sの金属板A,B,C三枚を距離d離して平行にならべた。金属板ＡB間には比誘電率2の誘電体を挿入した。A,Bに$+Q$の電荷を帯電させ、Cをアースした。この時金属板A,Bの電位及びこの装置の電気容量はいくらか。



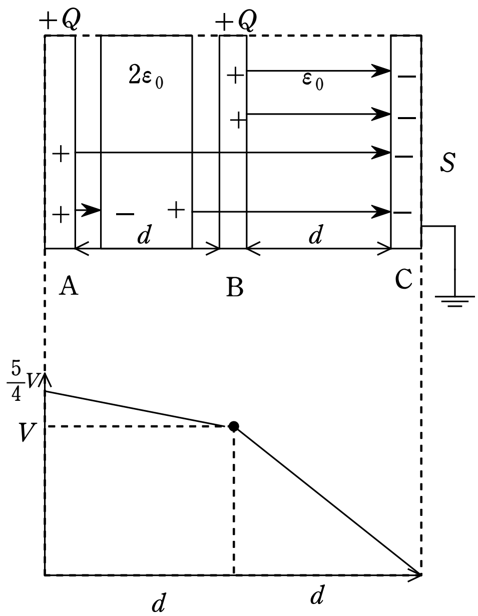
＜解説＞

　$+Q$を＋電荷二つとして図を描いてみる。アースしてあるので負電荷は4つ、つまり極板Cは$-2Q$の電荷がたまっていることになる。

　誘電体は電気力線の変化が分かるように極板から少し離して描いた。誘電体は比誘電率2なので、誘電体内の電気力線数は外部の半分となる。

　図を描いてみると、ＡB間とBC間の電気力線密度比は1:4となる。電位の傾きが1:4になるようにグラフを描くと右図のようになる。Bの電位をVとすると、ＡB間の電圧はBC間の電圧の$\dfrac{1}{4}$になるので、Aの電位は

$\dfrac{5}{4}V$となる。



　BC間の電気力線密度は$2Q$の電気量に該当するので$\dfrac{2Q}{\varepsilon_0 S}$、電位の傾きは$\dfrac{V}{d}$、よって、

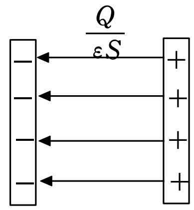
$$\frac{V}{d}=\frac{2Q}{\varepsilon_0 S}$$

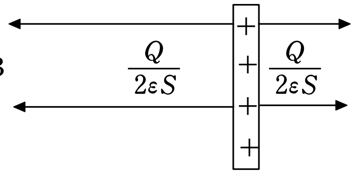
$V=\dfrac{2Qd}{\varepsilon_0 S}$　　Bの電位　$\dfrac{2Qd}{\varepsilon_0 S}$　　Aの電位　$\dfrac{5Qd}{2\varepsilon_0 S}$　　となる。

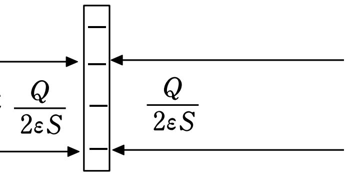
電気容量は　$Q=\dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}V$　となるので、　$\dfrac{\varepsilon_0 S}{2d}$

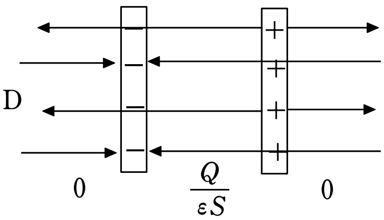
４．静電エネルギー

(1)　極板間の電場

A


B


C


D


コンデンサーの極板間の電気力線はA図のように描くがこの図は厳密ではない。正極板から出る電気力線は、B図のように極板から両側に広がっているのである。また、負極板の場合はC図のように両側から負極板に電気力線が集まっているのである。このB図とC図を重ねるとD図のようになる。

D図において、正極板の右側は電気力線が2本ずつ逆方向なので互いに打ち消しあい、電気力線は消滅して電場がなくなる。また、負極板の左側も同じような理由で、電場がないのである。そして、両極板間は両方の電気力線が強め合って電気力線数が4本になっている。この状態をまとめたのがA図である。

誘電率をε、極板面積をS、たまっている電気量をQとすると、A図では極板間の電気力線密度すなわち電場の強さは$\dfrac{Q}{\varepsilon S}$である。しかし、B図、C図では電気力線の半数が反対側にあるので、一方の側にある電気力線数は$\dfrac{Q}{2\varepsilon}$であるから、電場の強さは$\dfrac{Q}{2\varepsilon S}$となる。

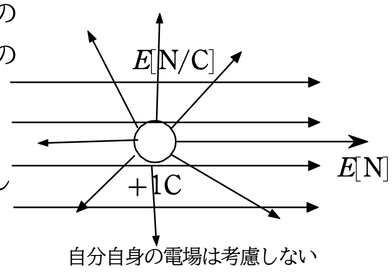
また、D図では、極板の外側が電場が逆方向であるから、$\dfrac{Q}{2\varepsilon S}-\dfrac{Q}{2\varepsilon S}=0$で、極板間は電場が同じ方向であるから、$\dfrac{Q}{2\varepsilon S}+\dfrac{Q}{2\varepsilon S}=\dfrac{Q}{\varepsilon S}$となり、A図と同じになる。

(2)　極板間に作用する力

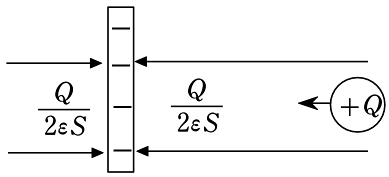
公式$F=qE$について確認してみよう。この公式は電場の定義「＋1Cに作用する力」を元に定義された式であるが、次のような点に注意しなければならない。

電場E[N/C]があるところに＋1Cを置くと、E[N]が作用するということである。このと

きに＋1Cの電荷自体も電場を持っていて、その周りの電場はその和になっているはずであるが、＋1C自体の電場はまったく考慮されていない。そのように電場の強さを定義してあるからである。



極板間に作用する力を考える場合はこの点に注意しなければならない。極板間の電場$\dfrac{Q}{\varepsilon S}$の半分は極板自身の電場であり、$F=qE$における電場にはqの電場を考慮せず、q以外の電場で考えなければならない。
よって、極板間に作用する力は右図のように考える必要がある。その結果、極板間に作用する力は

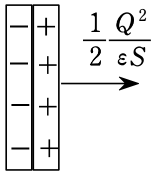


$$F=qE=Q\cdot\frac{Q}{2\varepsilon S}=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon S}$$

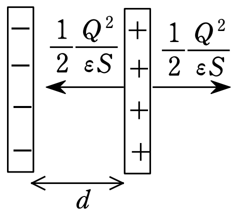
となる。

(3)　コンデンサーの静電エネルギー

位置エネルギーの定義は
「外力が等しい力で基準の位置から運ぶ仕事」
であることより、極板間の静電気力の位置エネルギーを求めてみよう。



極板がくっついている場合はコンデンサーのエネルギーは0と考えられる。ここが位置エネルギーの基準である。



極板間の静電気力が$\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{\varepsilon S}$であるから、外力がする仕事は

$$W=Fs=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon S}\cdot d$$

となる。これがコンデンサーにたまっている静電エネルギーUである。

$C=\varepsilon\dfrac{S}{d}$を用いると、

$U=\dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C}$となる。$Q=CV$を用いて変形すると、

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}CV^2$$

である。

(4)　単位体積あたりの静電エネルギー

コンデンサーの静電エネルギーは極板間の空間にたまっているエネルギーである。単位体積あたりの静電エネルギーを計算してみよう。極板間の電場の強さをEとすると，

$V=Ed$であり，$C=\varepsilon_0\dfrac{S}{d}$なので，

$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\frac{S}{d}(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2Sd$

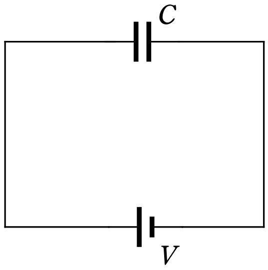
この式において，Sdは極板間の体積になるので，極板間の単位体積あたりの静電エネルギーは,

$U=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2$

となる。

⑸　電池による仕事とコンデンサーの静電エネルギー

電圧Vの電池にコンデンサーを接続して電気量Qを貯めたとすると、電池のした仕事は$W=qV$より、QVとなるが、コンデンサーにたまったエネルギーは$\frac{1}{2}QV$となる。

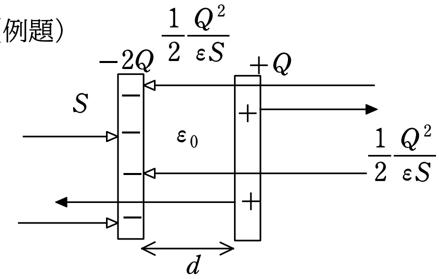


電池が放出したエネルギーQVのうちの半分しかコンデンサーにたまっていないことになる。これは、電荷が電池からコンデンサーに移動する間の抵抗による発熱が原因である。よって、抵抗による発熱量は、$QV-\frac{1}{2}QV=\frac{1}{2}QV$となる。

⑸　たまっている電気量が違うコンデンサー（例題）

＜例題＞

面積Sの金属板をd離して平行に置き、正極に$+Q$の電荷を負極に$-2Q$の電荷を帯電させた。この極板間の電圧及び静電エネルギーを計算せよ。



＜解説＞

視点が変わった問題は公式は通用しないので、基本的に原点に返って考えるとよい。

電気量Qあたり＋を2個図に記入して見ると、極板間に電気力線が３本走っている。負極から2本、正極から1本である。正極からの電場は$\frac{1}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0S}$、負極からの電場は$\frac{Q}{\varepsilon_0S}$なので、全体の電場は　$\frac{3}{2}\frac{Q}{\varepsilon_0S}$

よって、電圧は　$V=Ed=\frac{3}{2}\frac{Qd}{\varepsilon_0S}$

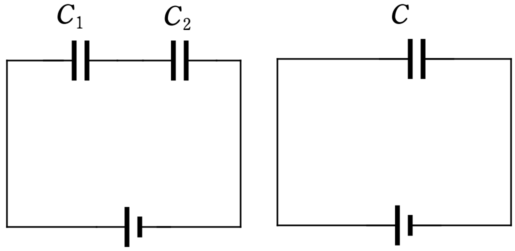
極板間のクーロン力は　正極の電気量×負極からの電場なので、

$F=Q\times\frac{Q}{\varepsilon_0S}=\frac{Q^2}{\varepsilon_0S}$

よって、静電エネルギーは　$W=Fd$より$\frac{Q^2d}{\varepsilon_0S}$

５．コンデンサーの合成容量

(1)　直列接続



　電気容量C_1のコンデンサーとC_2のコンデンサーを直列に接続したときの合成容量Cを求めてみよう。

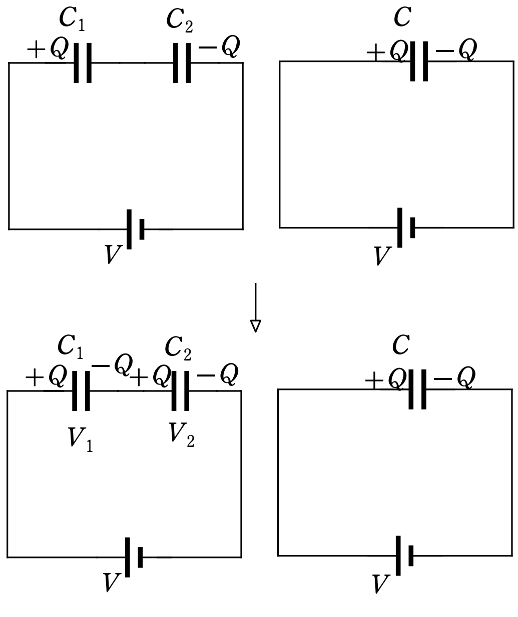
　まず、コンデンサーの電気容量を合成するということはどういうことなのであろうか？

　コンデンサーの合成とは、同じ能力をもつ1個のコンデンサーで置き換えるということで、コンデンサーとは電気をためるものであるから、電気をためる能力が同じコンデンサーで置き換えるということである。コンデンサーにかかる電圧が異なれば、たまる電気量も異なるので、

コンデンサーの合成とは

「同じ電圧で同じ電気量がたまる1個のコンデンサーで置き換える。」

ということになる。



　図に描くと右図のようになる。コンデンサーは両極にたまる電気量は異符号で絶対値は同じであるから、右下のような電気量がそれぞれのコンデンサーにたまる。

　コンデンサーC_1にかかる電圧をV_1、C_2にかかる電圧をV_2にすると、

$$V=V_1+V_2$$

が成立する。

また、$Q=CV$より、

$$V=\frac{Q}{C}、V_1=\frac{Q}{C_1}、V_2=\frac{Q}{C_2}$$

が成立する。

これを代入して、

$$\frac{Q}{C}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}$$

この結果

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

となる。これが直列の合成公式である。

　コンデンサーを直列に配線したときは、図のようにコンデンサーにたまる電気量は等しくなる。$Q=CV$より、CV＝一定となり、CとVは反比例することとなる。よって、

$$C_1:C_2=V_2:V_1$$

比を使えば計算が楽になることが多いので、使えるようにしておこう。

コンデンサー

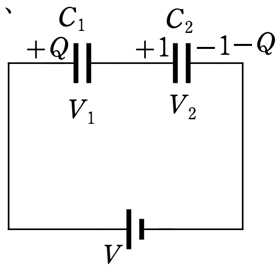
＜注意事項＞

　直列配線における合成公式を使うときは、接続する前にコンデンサーには電気がたまっていないことを確認すること、接続前に電気がたまっているときは合成公式は使えない。

　図のようにコンデンサーC_2に電荷1がたまっていたとすると、電池から何Cの電気が来ようとも、C_1にたまる電気量とC_2にたまる電気量は等しくならない。（電池からは正負同量の電荷が流れる）このため、Qが同じにならず、

$$\frac{Q}{C}=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}$$

が成立しないのである。



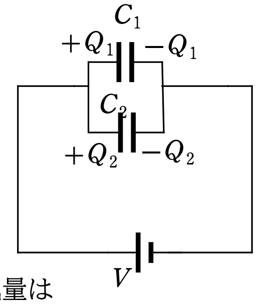
⑵　並列接続

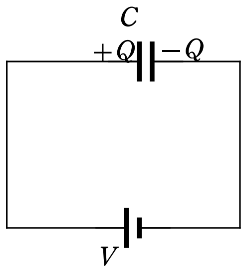
　並列接続でも、同じ電圧で同じ電気量がたまるような1個のコンデンサーで置き換えればよい。

　並列の場合は、電池から流れてきた電荷が二つのコンデンサーに分かれてたまることになる。しかし、その電気量は1個の場合と同じでなければならない。よって、

$$Q=Q_1+Q_2$$

が成立する。





$Q=CV$より、$Q_1=C_1V$、$Q_2=C_2V$、そして、$Q=CV$を代入すると、

$$CV=C_1V+C_2V$$

これより、

$$C=C_1+C_2$$

が成立する。

　並列接続では、並列接続している2つのコンデンサーの電圧は同じなので、$Q=CV$において、V＝一定となり、QとCは比例関係となる。よって、

$$Q_1:C_1=Q_2:C_2$$

が成立する。

＜注意事項＞

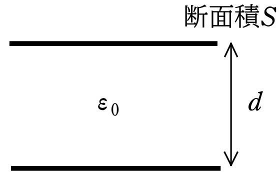
　並列接続の場合は直列と異なり、すべての電気極板が電源とつながっており、接続前に電気がたまっていても、1個のコンデンサーと同じ電気量になりうる。そのため、最初にコンデンサーに電気がたまっていても合成公式は使える。

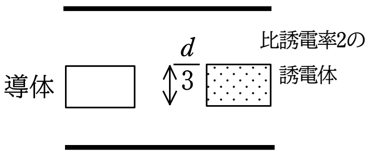
６．　コンデンサー容量計算

　複雑な構造をしたコンデンサーの容量計算をコンデンサーの合成を用いることによって計算できる。

(1)　コンデンサー内部に何かを挿入する場合

例として、次の問題で考えてみよう。

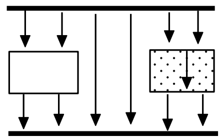




　真空中（誘電率ε_0）に極板面積Sの2枚の金属板を距離d離して平行に置いた。このときの電気容量をCとする。次に、この区間を3等分し中央の$\frac{1}{3}$に断面積$\frac{S}{3}$、厚さ$\frac{d}{3}$の導体及び比誘電率2の誘電体を極板と平行に挿入した。挿入後のコンデンサーの電気容量はいくらになるか？

電気容量が変わらないようにコンデンサーを分割し、つなぎ合わせて、合成容量を求めればよいのである。このとき分割したりつなぎ変えたりするのであるが、そのコンデンサーは常にもとのコンデンサーと同じ電気容量でなければならない。電気容量を変えないように分割やつなぎ替えをしなければならない。考え方の基本は電気力線にある。$Q=CV$より、QとVが変わらなければCは変わらないのである。Qとは電気力線の本数（$\frac{Q}{\varepsilon}$が電気力線本数）を表わしており、Vは電気力線の長さ（$V=Ed$）を表わしている。結果として、電気力線の本数と長さを変えなければ電気容量は変わらないのである。

手順①　**まず最初に電気力線を書き込む**

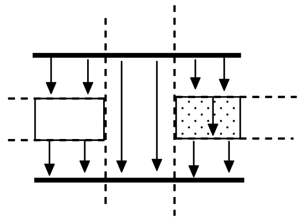


　誘電率に注意しながら満遍なく電気力線を書き込むこのとき、この電気力線の長さと本数は最後まで変えてはならない。

手順②　**電気力線が同じ領域ごとにコンデンサーを**

分割する。

　このコンデンサーの場合は右のように7つの領域に分かれる。これを分割すると、下の図のようになる。



　この状態で合成容量を計算してもよいが、練習の意味でいろいろとコンデンサーを動かしてみよう

　まずコンデンサーBは中に電気力線を含まないので、削除しても電気力線の本数や長さを変えたことにならない。よって、コンデンサーBを削除。

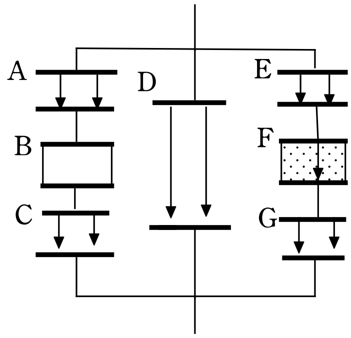
　AとCは、電気力線の本数が同じであるから、くっつけても良い。

　コンデンサーEとFは順番を入れ替えても良い入れ替えるとEとGをつなぐことができる。

（このとき、AとEなどをつなぐことができない。

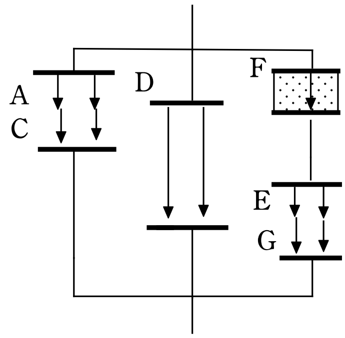
　AとEをつないだりすると、電気力線の長さが

　変わるのである。）



手順③　**コンデンサーの合成**

ここまでのまとめたのが右のコンデンサーである。この状態で各コンデンサーの電気容量を求めて合成すると良い。



　コンデンサーACは$\varepsilon_0\dfrac{\frac{1}{3}S}{\frac{2}{3}d}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\dfrac{S}{d}=\dfrac{1}{2}C$

　コンデンサーDは$\varepsilon_0\dfrac{\frac{1}{3}S}{d}=\dfrac{1}{3}C$

　コンデンサーFは$2\varepsilon_0\dfrac{\frac{1}{3}S}{\frac{1}{3}d}=2C$

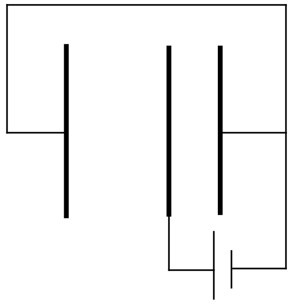
　コンデンサーEGはACと同じで$\dfrac{1}{2}C$

　コンデンサーFとEGを合成すると、$\dfrac{1}{C'}=\dfrac{1}{2C}+\dfrac{1}{\frac{1}{2}C}$　これより、$C'=\dfrac{2}{5}C$

　よって、全体の合成容量は$\dfrac{1}{2}C+\dfrac{1}{3}C+\dfrac{2}{5}C=\dfrac{37}{30}C$

　このように求められる。

⑵　極板が3枚以上ある場合

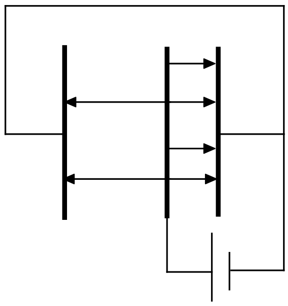


　右図のように極板が3枚以上ある場合も、考え方は⑴と同じである。

手順①　**電気力線を記入する**

　⑴と同じように満遍なく電気力線を記入する。この場合は極板間隔の狭いほうが電場が強いので電気力線数を多くしているが、こだわらなくても良い。

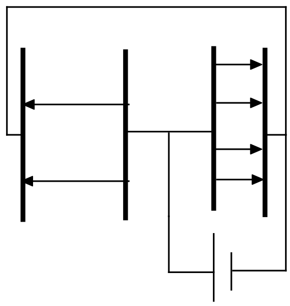
手順②　**各極板の電気力線数（電気量）を同じにする**



　コンデンサーは正極と負極の電気量の絶対値が同じである。しかし、極板が3枚以上あるとそうでない場合がある。この図の場合は真ん中の極板から電気力線が6本出ているが、他の電極は2本から4本である。

　この場合、真ん中の極板を縦に2枚分割すればよい。その図が下の図である。このようにすると同じコンデンサーの各極板の電気量の絶対値が等しくなる。

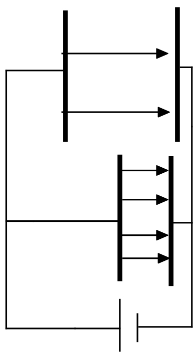
手順③　電気力線の向きをそろえる。



　⑴においてすべてのコンデンサーの電気力線は、同じ方向を向いている。しかし、この場合は、電気力線の向きが異なるものがある。そのため、⑴のようには計算できない。コンデンサーどおしをつないでいる導線は曲げても問題はない。導線を曲げることにより、コンデンサーを回転させて電気力線の向きをそろえるのである。この場合は電気力線の本数も長さも変えていない。

　このようにしてコンデンサーの向きを変えたのが下の図である。この図を見れば、このコンデンサーは並列配線であることが分かる。

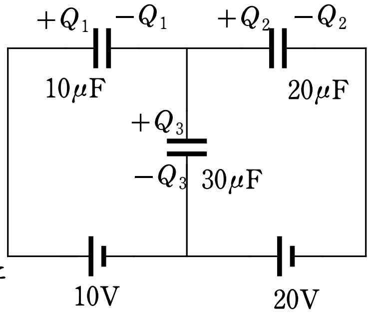
　後は⑴と同じようにして合成容量を求めればよい。



７．コンデンサー回路計算（必殺技）

必ず解ける方法

コンデンサーの回路は必ず解ける方法が存在する。まずはこの方法をマスターすること、この方法をマスターした後、各問題に適した簡単な方法で解けばよい。



右図のように10μF、20μF、30μFの3つのコンデンサーを10Vと20Vの電池を使って接続した。このとき、各コンデンサーにたまった電気量を計算してみよう。

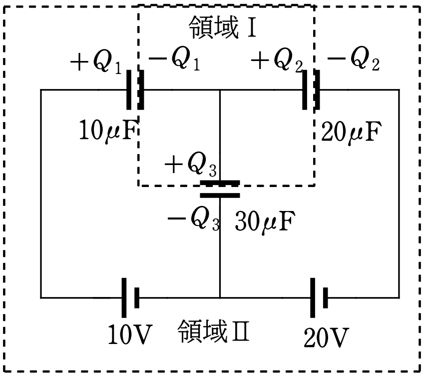
手順①　**「各コンデンサーにたまる電気量を仮定する。」**

電気量は未知であるから、未知数を使う。コンデンサーの数だけ未知数が存在することになる。この場合は、Q_1、Q_2、Q_3の3つの文字を使う。コンデンサーの電極の符号も不明であるが、自分で勝手に決めてよい。

コンデンサーの片方の電極を$+Q$とすれば、反対側は$-Q$となる。もし、自分が決めた符号と答えが異なるときは、方程式を解いたときにその解が負の数として出てくる。解がマイナスになったときは、自分で最初に決めた電極の符号が逆だったということである。

手順②　**「コンデンサーのみで回路を分割すると各領域の電気量和は常に一定である。方程式数は領域数−1」**

コンデンサーの極板間をつなぐようにして回路を分割する。この回路の場合は右のように点線で囲まれた二領域に分割できる。



各領域内はコンデンサーによって区切られているので、各領域内の電気量は他の領域に移動しないので、各領域内の電荷量の合計は常に一定である。領域内に電源があっても常に正負同量の電気量が出てくるので、電気量の合計は変らないのである。

領域Ⅰでは、回路をつないだ後のこの領域内の電気量は$-Q_1$、$+Q_2$、$+Q_3$であるが、この和は、回路をつなぐ前の同じ極板の電気量の和と同じである。すべてのコンデンサーが最初電気を持っていなかったとすると、この3極板の電気量の和は0である。もし、いくらかの電気がたまっていたとすると、その和となる。

この場合、領域Ⅰの各極板の電気量は$-Q_1$、$+Q_2$、$+Q_3$で最初すべてのコンデンサーに電気がたまっていなかったので、

$-Q_1+Q_2+Q_3=0$　　（方程式１）

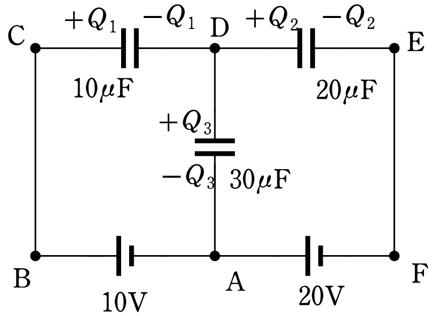
が成立する。

一方領域Ⅱは

$+Q_1-Q_2-Q_3=0$

これは領域Ⅰの方程式と実質同じ方程式である。回路全体の電気量も常に0なので、各領域で方程式が成立するが、そのうち一つは常に他の方程式と同じとなるので、有効な方程式（独立な方程式）は領域数−1となる。この場合２領域に分割されているので有効な方程式数は１である。

手順③　**「閉回路に沿って一周させたとき、その電圧の和は0である。方程式数は最小回路数である。」**



電位は地上でいう標高のイメージで考えると良い。ある場所から適当に徘徊して出発点まで戻ってきたとき、出発したときと、戻ってきたときの標高は同じなので、標高差は0である。これは当たり前のことであるが、電位についても同じことがいえる。

回路に沿って1周させ、その間の電位差（電圧）を合計すると、0になるはずである。これを用いて方程式を立てればよい。閉回路を一周する経路はいくつでも考えられるが、方程式を簡単にするために、なるべく最小のルートを取ると良い。最小の閉回路の数だけ方程式ができる。それ以上に作っても同じ方程式（数学的にいうと独立でない）なので、解くことはできない。

上の図において、ルートをはっきりさせるために6箇所にA～Fの記号を振った。

この回路の場合最小閉回路は2つである。その閉回路はABCDAルートと、ADEFAルートである。この２ルートで計算してみよう。

•ABCDAルートの場合

まず、AB間は10Vの電池をマイナス側からプラス側に移動する。このとき電位が10V上がる。次のBC間は何もないので電位差は0。CD間は間にコンデンサーがある。このコンデンサーの電圧は$V=\dfrac{Q}{C}$より$\dfrac{Q_1}{10\mu}$である。これをプラス側からマイナス側に通過するので、$\dfrac{Q_1}{10\mu}$[V]だけ電位が下がるにで、電位差は$-\dfrac{Q_1}{10\mu}$である。

DA間にもコンデンサーがある。このコンデンサーの電圧は$\dfrac{Q_3}{30\mu}$である。このコンデンサーをプラス側からマイナス側に移動するので、電位は$-\dfrac{Q_3}{30\mu}$だけ下がる。よって、A点からの電位差を合計すると、

$10-\dfrac{Q_1}{10\mu}-\dfrac{Q_3}{30\mu}$となる。1周しているので電位差の和は0である。よって、次の方程式が成立する。

$$10-\frac{Q_1}{10\mu}-\frac{Q_3}{30\mu}=0 \qquad （方程式２）$$

•ADEFAルートの場合

AD間にはコンデンサーがある。このコンデンサーをマイナス側からプラス側に移動するので、電位差は$+\frac{Q_3}{30\mu}$。次のDE間にもコンデンサーがあり、このコンデンサーをプラス側からマイナス側に移動するので、電位差は$-\frac{Q_2}{20\mu}$。EF間には何もないので電位差は0。次のFA間には20Vの電池があり、この電池をマイナス側からプラス側に移動するので電位差は＋20V電位である。その結果1周した時の電位差の合計は

$\frac{Q_3}{30\mu}-\frac{Q_2}{20\mu}+20$となる。電位差の合計は0なので、

$$\frac{Q_3}{30\mu}-\frac{Q_2}{20\mu}+20=0 \qquad （方程式３）$$

が成立する。

ここまでの方程式１～３を連立して解くと

$Q_1=150\mu$C、$Q_2=300\mu$C、$Q_3=-150\mu$C

である。ここで、Q_3の解がマイナスになっている。これは、仮定した電極の符号が逆であることを意味しており、上側の電極が-150μCで下側が$+150\mu$Cとなるのである。

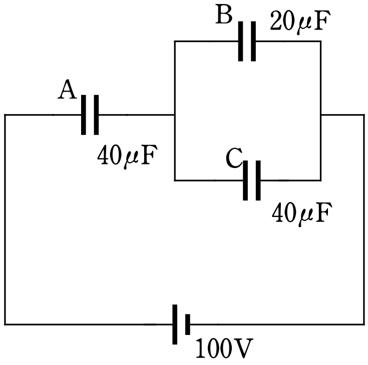
この解き方はどのような回路でも計算可能なので必ずマスターしておくべきである。ただし、複雑になることが多いので、簡単に解ける場合は、別の方法で解いてもよい。以下はその特別な場合である。

８． 並直列回路の計算

並列と直列のみでできている回路で、さらに最初すべてのコンデンサーに電荷がたまっていないという条件を満たすとき、この方法が可能である。この条件はコンデンサーの合成公式が使える条件と同じである。つまり、コンデンサーの合成が可能ならば、この公式が使えるということである。

例として右の回路でその方法を述べてみよう。

40μF、20μF、40μFのコンデンサーA、B、Cを100Vの電源を使って図のように接続した。初めすべてのコンデンサーの電荷はたまっていなかったとして、各コンデンサーの電気量を求める。



考え方としては、各コンデンサーのQ、C、Vのうち分かるものから、計算していくという方法である。どれから分かるのかが判別しにくいために表にまとめると分かりやすい。なれてくればその必要はなくなる。

	Q	C	V
A	①	40	⑧
B	②	20	⑦
C	③	40	⑥
全体	④	⑤	100

まず、与えられたデータを表に当てはめていく。残りの空欄を合成公式や$Q=CV$の公式で埋めていけばよいのである。

計算手順１

各コンデンサーの電気容量が分かっているので、⑤が電気容量の合成で計算できる。⑤は24μFである。次に$Q=CV$を使って、④が計算できる。④は2400μCである。

④は電池から出た電気量を意味しており、この電気量はすべてAのコンデンサーにたまる。よって、④と①は同じ値である。コンデンサーAについて$Q=CV$を用いれば⑧が求められる。⑧は60Vとなる。Aの電圧が分かれば⑦⑥の電圧が分かりともに40Vとなる。B、Cに関して$Q=CV$を用いれば②、③が求められる。それぞれ800μFと1600μFである。

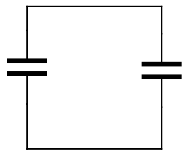
計算手順２

１の方法でも充分であるが問題によればもっと簡単な方法もある。コンデンサーの合成時に並列の合成は簡単であるが直列の合成は複雑である。そこで、直列のときは電圧の比を利用すると良い。直列であるから、二つのコンデンサーの電気量は等しく、そのため、$Q=CV$でCとVが逆比の関係になる。これを用いるのである。

まず、BとCのコンデンサーの電気容量を合成する。これは並列であるから簡単で、60μFである。コンデンサーAと合成したコンデンサーBCは直列の関係にあり、その電気容量の比は40:60である。よって、電圧の比は逆になり60:40となる。つまり、コンデンサーAの電圧が60VでコンデンサーB、Cの電圧が40Vなのである。あとは$Q=CV$を使えば①、②、③と簡単に求められる。

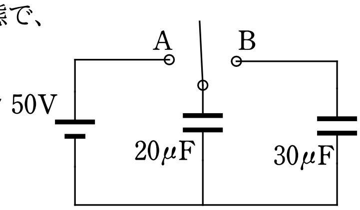
９． 直結回路

コンデンサーをスイッチで切り替える問題も多いが、そのなかで二つのコンデンサーを直結した場合も簡単に解くことができる。



右図のような回路である。間にもうひとつのコンデンサーが入っていたりするとできない。この回路の場合だけである。並直列と同じであるが、異なるのは、最初に電荷がたまっていても良いという点である。この場合は、バケツのイメージで解くことができる。

今までと同じように例題形式で導き方を考えてみよう。

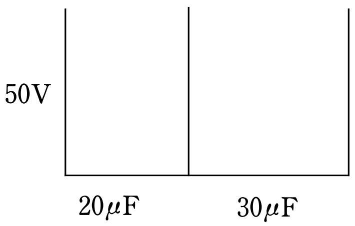


最初コンデンサーに電気はたまっていない状態で、二つのコンデンサーを図のように50Vの電池を使って配線した。まず、スイッチをAの側に倒し20μFのコンデンサーを満タンにした後、スイッチをBに切り替えたとき、30μFのコンデンサー

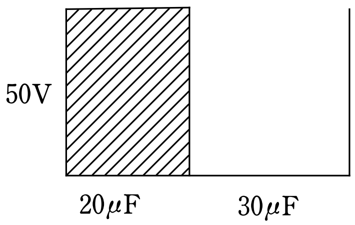
にどれだけの電気量がたまっているか。

　これは良く見るパターンの問題であるが、問題集では必ず解ける方法で解答してあるのが普通である。バケツのイメージでは次のようになる。

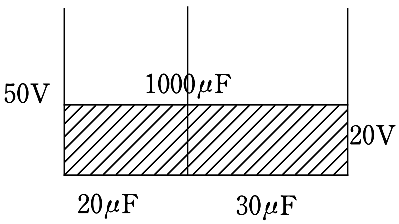
二つのコンデンサーと見立てたバケツを並べてつないだとき、電池の電圧がバケツの深さになり、バケツの底面積が電気容量となる。
スイッチをAに倒して、20μFのコンデンサーを満タンにしたということは左側のバケツが満タンになったということである。



　たまった電気量はバケツの内容積の1000μCである。次にスイッチをBに倒したときはどう考えるのか？これは、間のしきりに穴を開けたと考えればよいのである。間のしきりに穴が開いた場合は、左側のバケツから右側のバケツに水（電荷）が流れ込み、同じ高さ（電圧）になったときに、流れ込みがとまる。

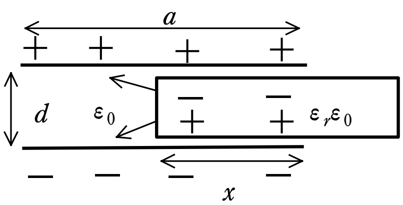


　たまった電気量は体積となるので、深さ（電圧）は20Vであることが分かる。よって、30μFのコンデンサーには600μCの電荷がたまっていることが分かる。



10.　コンデンサーに挿入する誘電体にはたらく力

　コンデンサーに誘電体を近づけると,金属板間に誘電体を引き込む力がはたらく。その力を求めてみよう。
平行板コンデンサーの極板間隔をd，極板の長さをa奥行きをbとする。極板間は真空で誘電率ε_0であり，その極板間に比誘電率ε_rの誘電体を隙間なく挿入しようとした。図の瞬間は極板間右端からx挿入した瞬間である。誘電体に生じた電極により，誘電体は中に引きずり込まれる。



　誘電体にはコンデンサーに引きずり込む力がはたらくので，外力を加えてゆっくりと挿入するとコンデンサーの静電エネルギーに変化が起こる。これが外力がした仕事となるので，xから$x+dx$に誘電体が挿入されるときの内部エネルギーの変化を求めれば，外力のした仕事がわかる。この力と誘電体を引き込む力とは同じ大きさである。

　誘電体を挿入中のコンデンサーは極板の幅が$a-x$とxの二つのコンデンサーの並列接続と考えることができる。合成容量Cは

$$C=\varepsilon_0\frac{b(a-x)}{d}+\varepsilon_r\varepsilon_0\frac{bx}{d}=\varepsilon_0\frac{b(a+(\varepsilon_r-1)x)}{d}$$

　電気量Qがたまっている場合の静電エネルギーUは

$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{b\{a+(\varepsilon_r-1)x\}\varepsilon_0} \quad \cdots①$$

この状態よりdx挿入すると，（$0 \leqq x < a$である。$x=a$のとき$x+dx$はできない）

$$U+dU=\frac{1}{2}\frac{Q^2 d}{b\{a+(\varepsilon_r-1)(x+dx)\}\varepsilon_0} \quad \cdots②$$

②－①を計算すると

$$dU=-\frac{1}{2}\frac{Q^2 d(\varepsilon_r-1)}{b\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2\varepsilon_0}dx$$

この式は①式をxで微分した式と同じである。この式がdx挿入するときの仕事である。この仕事が負となるので静電エネルギーは減少している。

よって，コンデンサー内に引き込まれる力の大きさは

$$F=\frac{1}{2}\frac{Q^2 d(\varepsilon_r-1)}{b\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2\varepsilon_0} \qquad (0 \leqq x < a)$$

$x=a$のときは$F=0$である。